Tema Nº 1

Vectores. Cálculo Vectorial

Contenido temático

1.- Estudio de las Magnitudes.

Magnitudes Físicas
http://newton.cnice.mec.es/materiales_didacticos/magnitudes/magnitudes.html

Magnitud
http://recursostic.educacion.es/newton/web/materiales_didacticos/medida/magnitudes.htm

Magnitud
http://www.quimicaweb.net/ciencia/paginas/magnitudes.html

Las Magnitudes son atributos con los que medimos determinadas propiedades físicas, por ejemplo una temperatura, una longitud, una fuerza, la corriente eléctrica, etc.

Estudiemos la siguiente experiencia:

La policía de tráfico que está en carreta recibe un mensaje del helicóptero de apoyo que dice: Coche, de tales características, marcha a una velocidad de 120 Km/h en zona de velocidad limitada a 50 Km/h. en conducción temeraria.

Se espera que la policía salga a la búsqueda del conductor que está infringiendo la ley. La pregunta es la siguiente ¿con los datos aportados pueden hacer su trabajo?

El comunicado aporta un número y una unidad (120 Km/h) pero no aporta los datos necesarios que establezcan las características del movimiento del coche, tales como la

dirección y el sentido del movimiento, por lo que la policía no podrá realizar su trabajo, es decir, no podrá salir a la búsqueda del conductor infractor.

2.- Magnitudes Escalares y Vectoriales.

Video: Animaciones sobre Magnitudes Escalares y vectoriales
http://www.youtube.com/watch?v=PqNlCvfZ9H0

Magnitudes Escalares y Vectoriales
http://www.fisicapractica.com/magnitudes.php

Magnitudes Escalares y Vectoriales
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

Con la experiencia realizada en el apartado nº 1 llegamos a la conclusión de que las magnitudes las podemos clasificar en:

a) **Magnitudes escalares.- Son aquellas que para su completa definición sólo necesitan de un número, seguido de una unidad en que la medimos. Este es el caso de la temperatura, masa, longitud para las cuales basta con indicar los grados, los gramos o los metros de una distancia.**

b) **Magnitudes vectoriales.- Son aquellas que para quedar definidas necesitan más que un simple número. Precisan, además, una dirección y un sentido. Si se trata de las fuerzas además necesitamos un punto de** aplicación. Son ejemplos de estas magnitudes: velocidad, aceleración y fuerza, entre otras.

La fuerza es la típica magnitud vectorial. Para conocer los efectos de una fuerza cuando se aplica a un objeto, es necesario saber su punto de aplicación, su dirección, sentido y el módulo o intensidad con la que dicha fuerza llega al cuerpo. Es decir, no es suficiente con decir que la fuerza vale o tiene un módulo de 42 N (Newton).

Las magnitudes vectoriales se representan mediante la sigla de la magnitud con una flecha (vector) encima ($\vec{V}$). La fuerza es una magnitud vectorial, la representaremos de la forma $\vec{F}$.

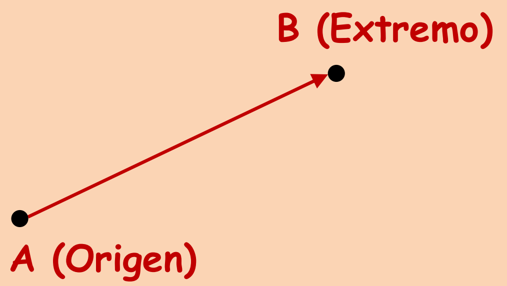
3.- Estudio de los Vectores.

Hemos hablado de magnitudes vectoriales y ello nos obliga a conocer lo que es un Vector.

Vectores
http://www.vitutor.com/geo/vec/b_1.html

Definición de Vectores
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

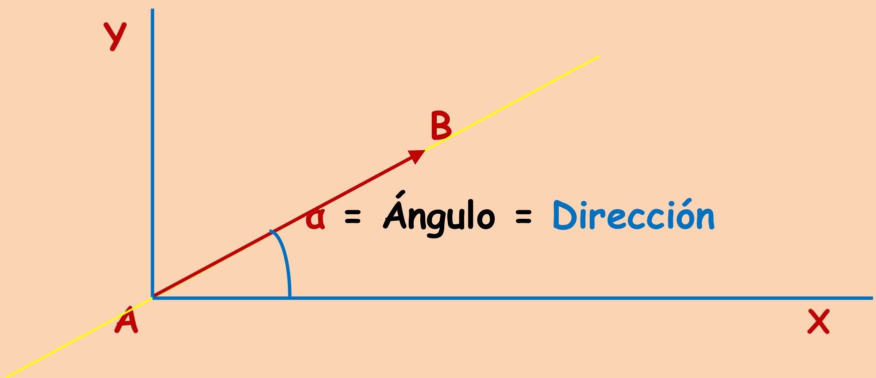
Un vector fijo $\vec{AB}$ es un segmento orientado que parte del punto A (origen) al punto B (extremo).



3.1.- Elementos de un Vector:

a) Dirección de un vector

La dirección del vector es la dirección de la recta que contiene al vector o de cualquier recta paralela a ella. Concretamente la dirección viene determinada por el ángulo que forma la recta que contiene el vector con el eje OX.



b)

Sentido de un vector

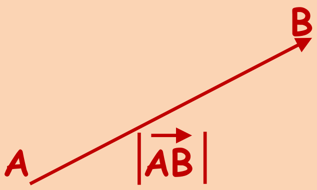
El sentido del vector $\vec{AB}$ viene determinado por la punta de flecha del citado vector:

c)

c)

Módulo de un vector

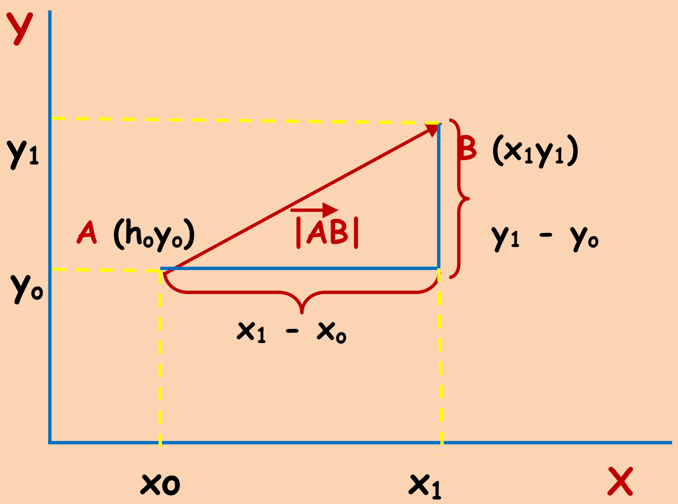
El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es la longitud del segmento $\overline{AB}$. Se representa por $|\overrightarrow{AB}|$.



El módulo de un vector es un número siempre positivo o cero.

Calculo del módulo de un vector:

Para ello llevaremos el vector $\overrightarrow{AB}$ a unos ejes de coordenadas cartesianas en el plano.



Si aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_o)^2$$

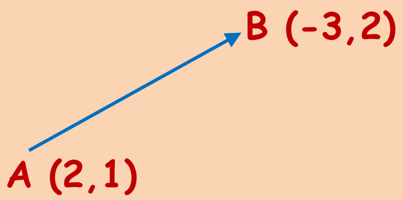
$$|\overrightarrow{AB}| = [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - yo)^2]^{1/2}$$

Ejercicio resuelto

Calcular el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ sabiendo que A es el punto de coordenadas (2,1) y B el punto de coordenadas (-3,2). ¿Tendrá el mismo módulo $\overrightarrow{AB}$ el vector $\overrightarrow{BA}$?.

Resolución

(x_o,y_o)
A(2,1)
(x_1,y_1)
B(-3,2)



$\overrightarrow{AB} = [(x_1 - x_o), (y_1 - y_o)]$

$\overrightarrow{AB}\ [(-3 - 2), (2 - 1)]$

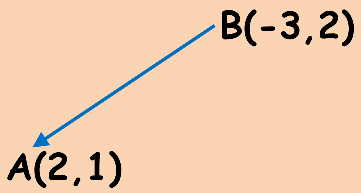
$\overrightarrow{AB}\ (-5, 1)$ → **Expresión del vector $\overrightarrow{AB}$ en función de sus componentes cartesianas**

$$|\overrightarrow{AB}| = [(-5)^2 + 1^2]^{1/2} \quad ; \qquad |\overrightarrow{AB}| = (25+1)^{1/2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 5.1\ u$$

u = unidad de la magnitud vectorial

Vector $\vec{BA}$:



$\vec{BA}$ [(2 – (-3) , (1 – 2)]

$\vec{BA}$ = (5,-1)

$|\vec{BA}| = [\,5^2 + (-1)^2]^{1/2}$; $|\vec{BA}| = (\,25 + 1\,)^{1/2}$

$|\vec{BA}| = (26)^{1/2} = 5,1\ u$

Los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BA}$ tienen el mismo módulo. Como veremos más adelante se trata de vectores opuestos, es decir, aquellos que tienen la misma dirección y módulo pero el sentido contrario.

Ejercicio resuelto

El vector $\vec{AB}$ viene determinado por las componentes (-11,8). Sabemos que el origen es el punto B(-7,5). Determinar el punto origen A

Resolución

B (-7,5)

$\vec{AB}$ (-11,8)

$\overrightarrow{AB}$ (-11,8)

$\overrightarrow{AB} = [\ (x_B - x_A)\ ,\ (y_b - y_A)\ ]$

$\overrightarrow{AB} = [\ (\ -7 - x_A\ )\ ,\ (\ 5 - y_A)\ ]$

$-11 = -7 - x_A$

$x_A = 4$

$8 = 5 - y_A$

$y_A = -3$

Punto A: A (4,-3)

Ejercicio resuelto

Calcular el valor de "k" sabiendo que el módulo del vector $\overrightarrow{V}$(k,3) es 5.

Resolución

$|\ v\ | = (\ k^2 + 3^2\ )^{\frac{1}{2}}$

$5 = (\ k^2 + 3^2\ )^{1/2}$

$25 = K^2 + 9$

$k^2 = 16$

$k = \pm 4$

Son válidos los dos valores de "k"

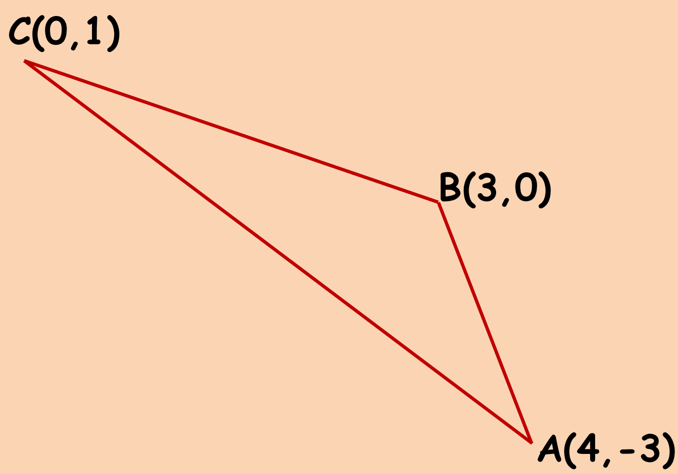
Ejercicio resuelto

Clasificar el triángulo determinado por los puntos: A(4,-3) , B(3,0) y C(0,1).

Resolución

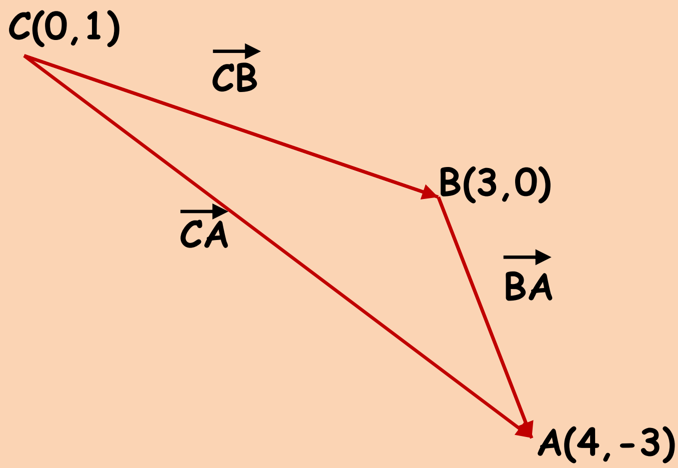
Podremos clasificar el triángulo en función de las longitudes de sus lados.

A (4,-3) , B (3,0) y C (0,1).



Las longitudes de los lados del triángulo coinciden con los módulos de los vectores que podemos formar con los lados del mismo:

$\overline{CB} = |\overrightarrow{CB}|$
$\overline{BA} = |\overrightarrow{BA}|$
$\overline{CA} = |\overrightarrow{CA}|$



CB = [(3 – 0, 0 – 1)] ; $\overrightarrow{CB}$ (3,-1)
BA = [(4 – 3), (-3 – 0)] ; $\overrightarrow{BA}$ (1,-3)
CA = [(4 – 0), (-3 – 1) ; $\overrightarrow{CA}$ (4,-4)

$|\overrightarrow{CB}| = [3^2 + (-1)^2]^{1/2} = (9 + 1)^{1/2} = 3{,}16$ udl
$|\overrightarrow{BA}| = [1^2 + (-3)^2]^{1/2} = (1+9)^{1/2} = 3{,}16$ udl
$|\overrightarrow{CA}| = [4^2 + (-4)^2]^{1/2} = (16 + 16)^{1/2} = 5{,}65$ udl

udl = unidad de longitud

Nuestro triángulo tiene dos lados iguales y uno distinto por lo que podemos clasificarlo como triángulo Isósceles.

3.2.- Clasificación de vectores

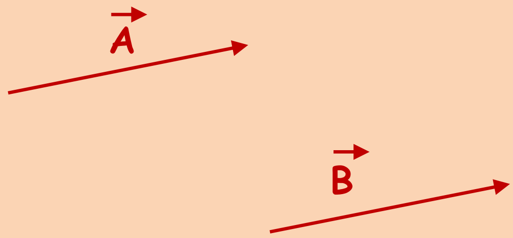
Clasificación de Vectores
https://sites.google.com/site/vectoresfisica/clasificacion-de-vectores

Clasificación de vectores (BUENO)
http://laplace.us.es/wiki/index.php/2.8._Ejemplo_de_clasificaci%C3%B3n_de_vectores

Podemos establecer la siguiente clasificación de vectores:

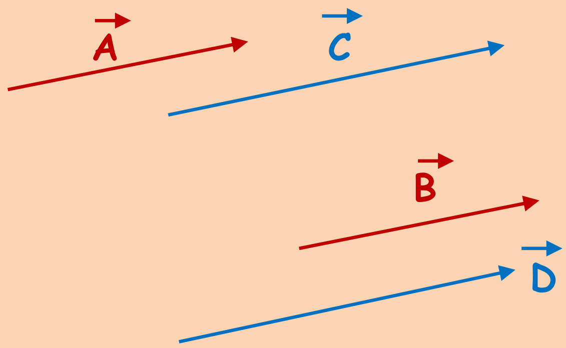
a) Vectores equipolentes

Dos vectores son equipolentes cuando tienen igual módulo, dirección y sentido lo que implica que sean paralelos.



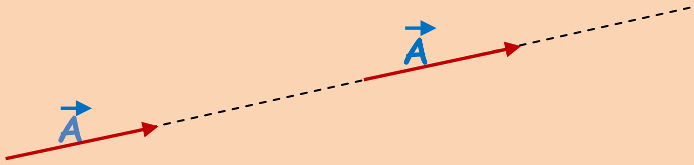
b) Vectores libres

El conjunto de todos los vectores equipolentes entre sí se llama vector libre. Es decir, los vectores libres tienen el mismo módulo, dirección y sentido y se pueden trasladar paralelamente a sí mismos.



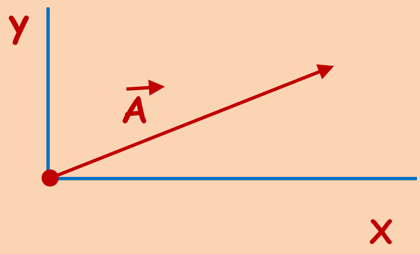
c) Vectores Deslizantes

Son aquellos que se pueden trasladar sobre la recta en que se apoyan, es decir, a lo largo de su dirección



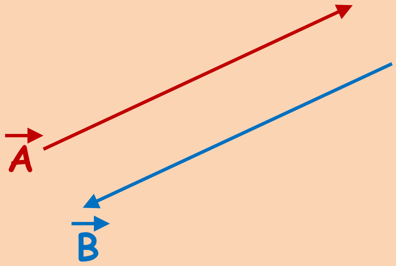
d) Vectores fijos

Son aquellos cuyo punto de aplicación, dirección y sentido son fijos e invariables.

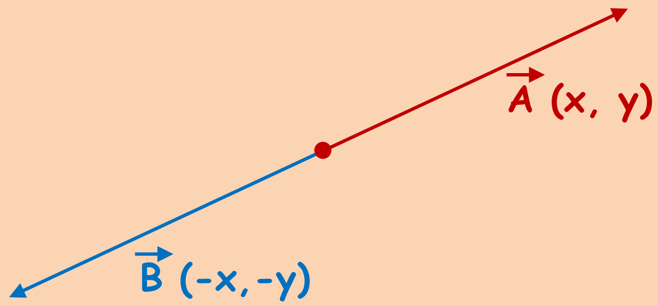


e) Vectores opuestos

Los vectores opuestos tienen el mismo módulo y dirección pero distinto sentido.

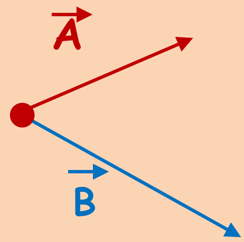


En Física se estudian con el mismo punto de aplicación:



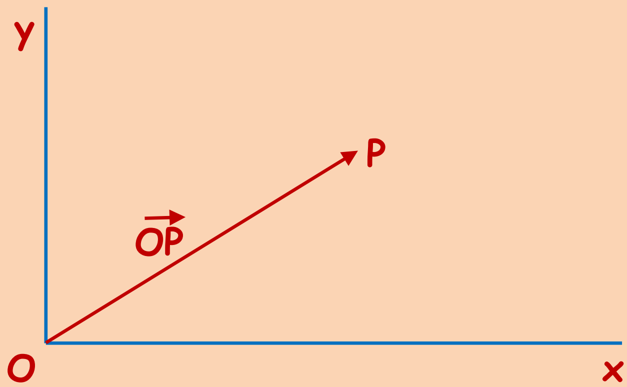
f) Vectores concurrentes

Los vectores concurrentes tienen el mismo origen.



g) Vector Posición

El vector que une el origen de coordenadas O con un punto P se llama vector posición del punto P.



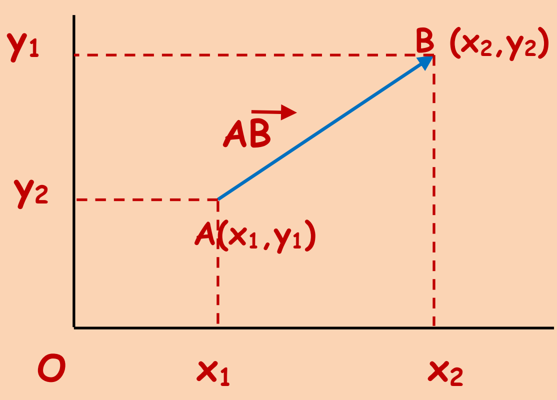
4.- Componentes Cartesianas de un Vector

Componentes de un vector (R2)
https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/components-of-a-vector
Video: Componentes de un vector
https://www.youtube.com/watch?v=Gi2LIWVysu0

Componentes de un Vector (Interactivo)
http://www.educaplus.org/movi/1_3componentes.html

Componentes cartesianas de un vector (R3)
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Componentes_cartesianas_de_un_vector_(G.I.A.)

Tenemos el vector $\vec{AB}$, tiene como origen es el punto A y extremos el punto B. El punto A tiene de coordenadas (x_o ,y_o) y el punto B(x_1,y_1). Determinar las coordenadas o componentes cartesianas del vector $\vec{AB}$.
Las coordenadas del vector AB las podremos obtener restando a las coordenadas del Punto extremo, B, las coordenadas del origen, A.



Las componentes de $\overrightarrow{AB}$ las podemos conocer:

$\overrightarrow{AB} = [(x_2 - x_1), (y_2 - y_1)]$

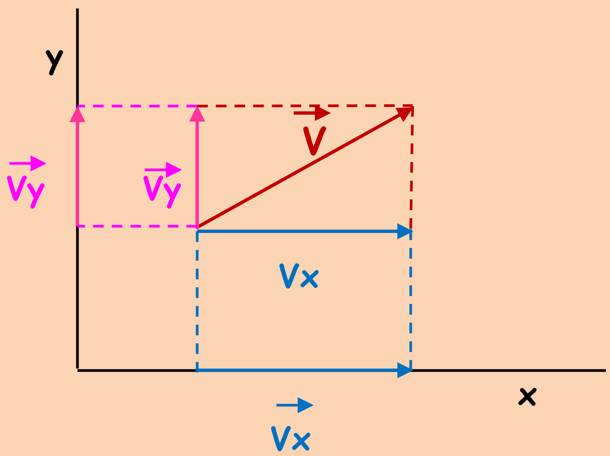
Si el punto A tiene de coordenadas (3,2) y el punto B (5,7) las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ serán:

$\overrightarrow{AB} = [(5 - 3), (7 - 2)] \leftrightarrow \overrightarrow{AB}\ (2,5)$

Vemos a continuación otras formas de obtener las Componentes de un vector.

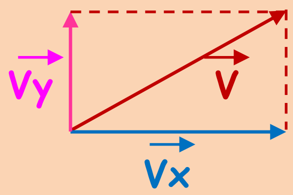
4.1.- Componentes de un vector en el plano (2R)

En unos ejes de coordenadas cartesianas colocamos el vector $\vec{V}$:

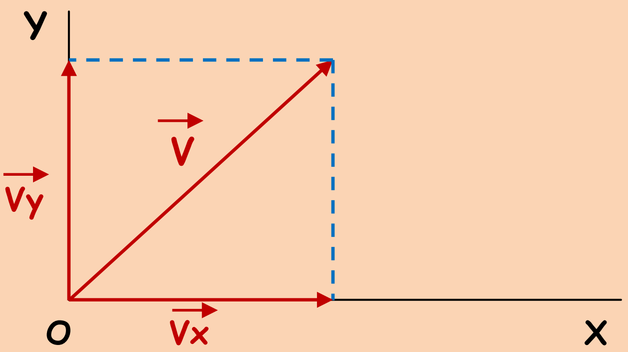


Al proyectar el vector $\vec{V}$ sobre los ejes de coordenadas obtenemos las componentes cartesianas del vector $\vec{V}$

De la gráfica anterior y utilizando la equipolencia entre vectores podemos ver mejor las componentes del vector $\vec{V}$:



Podemos hacer coincidir el origen del vector $\vec{V}$ con el origen de coordenadas:



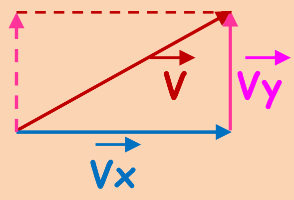
Vectorialmente:

$\vec{V} = \vec{Vx} + \vec{Vy}$

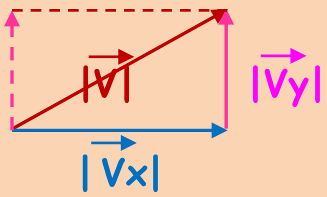
El vector $\vec{V}$ lo podemos representar de forma abreviada:

$$\vec{V} \; (\vec{Vx} \; , \; \vec{Vy} \;)$$

Por razones de equipolencia vectorial el esquema anterior lo podemos representar de la forma:



Obtenemos gráficamente un triángulo rectángulo en donde la hipotenusa es el módulo del vector $\vec{V}$ y los módulos de sus componentes los catetos:



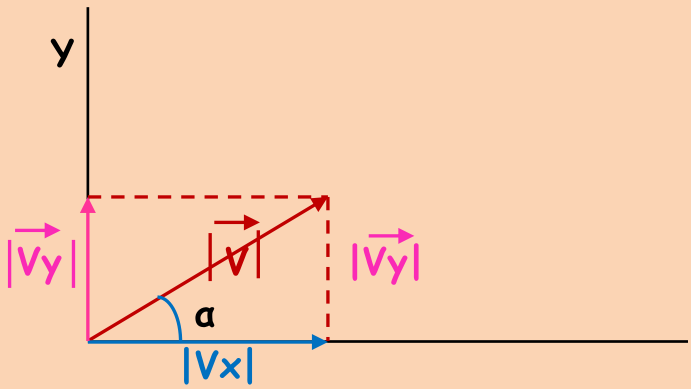
Según Pitágoras:

$$|\vec{V}|^2 = |\vec{V}x|^2 + |\vec{V}y|^2$$

De dónde:

$$|\vec{V}| = [\ |Vx|^2 + |Vy|^2]^{1/2}$$

Las componentes $\vec{V}x$ y $\vec{V}y$ también se pueden conocer realizando la proyección de $\vec{V}$ sobre cada uno de los ejes de coordenadas:



Aplicando trigonometría:

sen α = cateto opuesto / hipotenusa

cos α = cateto contiguo/hipotenusa

$$\text{sen } \alpha = |\vec{V}y| \,/\, |\vec{V}|$$

$|\vec{V_y}| = |\vec{V}| \cdot \text{sen}\ \alpha$

De la misma manera podemos llegar a la conclusión:

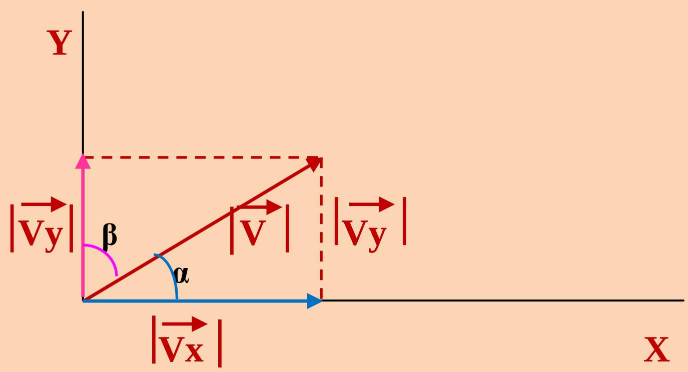
$\cos \alpha = |\vec{V_x}| / |\vec{V}|$

$|\vec{V_x}| = |\vec{V}| \cdot \cos \alpha$

4.2.- Cosenos Directores

Se denominan cosenos directores de un vector $\vec{V}$ a los cosenos de los ángulos que forma dicho vector con cada uno con los ejes de Coordenados. Los cosenos directores determinan la dirección del vector a lo largo de cada uno de los ejes.

Descompongamos el vector $\vec{V}$ sobre cada uno de los ejes:



Geométricamente:

$\cos \alpha = |\vec{V_x}| / |\vec{V}|$

$\cos \beta = |\vec{V_y}| / |\vec{V}|$

cos α y cos β se conocen como Cosenos Directores.

Conociendo los cosenos directores podremos determinar los ángulos que forma el vector con los ejes de coordenadas y como consecuencia la dirección del vector.

Matemáticamente se cumple:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 \quad (1)$$

La demostración es fácil:

Sustituimos en (1) los valores del cos α y cos β:

$$(|V_x| / |V|)^2 + (|V_y| / |V|)^2 = 1$$

$$|V_x|^2 / |V|^2 + |V_y|^2 / |V|^2 = 1$$

$$(|V_x|^2 + |V_y|^2) / (|V|^2) = 1$$

Si recordamos que $|V|^2 = |V_x|^2 + |V_y|^2$

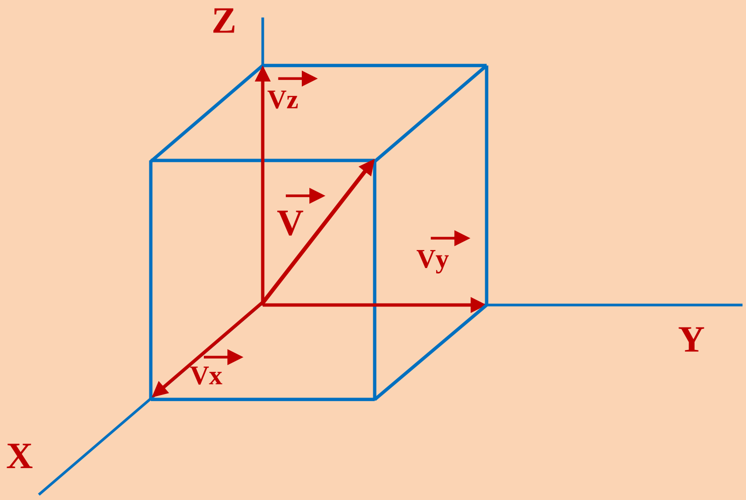
Nos quedaría:

$$|V|^2 / |V|^2 = 1$$

Lo queríamos demostrar.

4.3.- Componentes de un Vector en el Espacio (R3)

Al trabajar en el espacio (3D) todo vector tiene tres componentes. Vamos a dibujar un poco:



Vectorialmente:

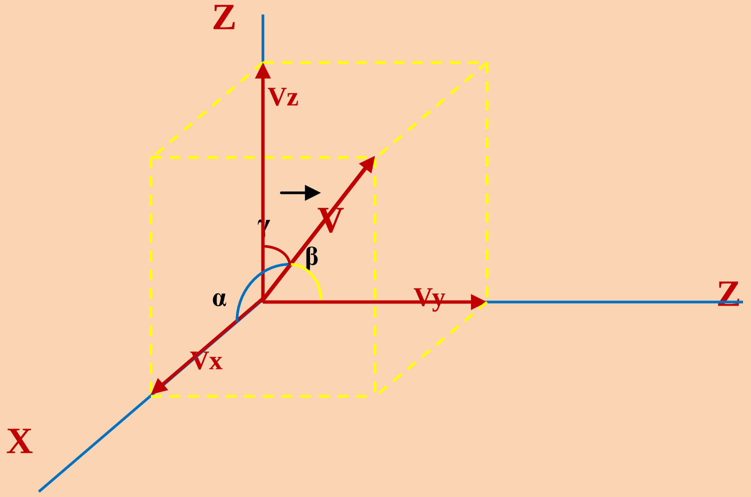
$\vec{V}\ (\vec{Vx}\ ,\ \vec{Vy}\ ,\ \vec{Vz}\ )$

$\vec{V} = \vec{Vx} + \vec{Vy} + \vec{Vz}$

$|\ \vec{V}\ |^2 = |\ \vec{Vx}\ |^2 + |\ \vec{Vy}\ |^2 + |\ \vec{Vz}\ |^2$

$|\ \vec{V}\ | = (|\ \vec{Vx}\ |^2 + |\ \vec{Vy}\ |^2 + |\ \vec{Vz}\ |^2)^{1/2}$

Si queremos conocer los cosenos directores:



Geométricamente:

$\cos \alpha = |\vec{Vx}| / |\vec{V}|$

$\cos \beta = |\vec{Vy}| / |\vec{V}|$

$\cos \gamma = |\vec{Vz}| / |\vec{V}|$

Cumpliéndose:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Ejercicio resuelto

Hallar los cosenos directores del vector $\vec{u}$ (2, 2, 1).

Resolución

$\cos \alpha = |\vec{ux}| / |\vec{u}|$

$\cos \beta = |\vec{uy}| / |\vec{u}|$

$\cos \delta = |\vec{u}z| / |\vec{u}|$

$|\vec{u}| = (2^2 + 2^2 + 1^2)^{1/2} = 3$

$\cos \alpha = 2/3 \quad ; \quad \cos \beta = 2/3 \quad ; \quad \cos \delta = 1/3$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{u}$ (3,1,-1) y $\vec{v}$ (2,3,4), hallar:

a) **Módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**
b) **Cosenos directores de $\vec{v}$,**
c) **Demostrar que la suma de los cuadrados de los cosenos directores del vector $\vec{v}$ es igual a la unidad.**

a) $|\vec{u}| = (u^2x + u^2y + u^2z)^{1/2}$

$|\vec{u}| = (3^2 + 1^2 + (-1)^2]^{1/2} = (11)^{1/2}$

$|\vec{v}| = (v^2x + v^2y + v^2z)^{1/2}$

$|\vec{v}| = (2^2 + 3^2 + 4^2)^{1/2} = (29)^{1/2}$

b) $\cos \alpha = \vec{v}_x / |\vec{v}| = 2/(29)^{1/2}$

$\cos \beta = \vec{v}_y / |\vec{v}| = 3/(29)^{1/2}$

$\cos \delta = \vec{v}_z / |\vec{v}| = 4/(29)^{1/2}$

c) $[2/(29)^{1/2}]^2 + [3/(29)^{1/2}]^2 + [4/(29)^{1/2}]^2 =$

$= 4/29 + 9/29 + 16/29 = (4 + 9 + 16) / 29 = 29/29 = 1$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{u} = 3\ \vec{i} - 2\ \vec{j} + 3\ \vec{k}$; $\vec{v} = 2\ \vec{i} - 6\ \vec{j} + \vec{K}$ y $\vec{z} = 8\ \vec{i} + \vec{j} - 3\ \vec{k}$, hallar sus módulos y sus cosenos directores.

Resolución

$|\ \vec{u}\ | = [\ 3^2 + (-2)^2 + 3^2]\ = (22)^{1/2} = 4,69$

$|\ \vec{v}\ | = [\ 2^2 + (-6)^2 + 1^2]\ = (41)^{1/2} = 6,4$

$|\ \vec{z}\ | = [\ 8^2\ +\ 1^2\ + (-3)^2]^{1/2} = (74)^{1/2} = 8,6$

Vector $\vec{u}$:

$\cos\alpha = \vec{u}_x / |\ \vec{u}\ |$; $\cos\alpha = 3/4,69$; $\cos\alpha = 0,63$

$\cos\beta = \vec{u}_y / |\ \vec{u}\ |$; $\cos\beta = (-2)/4,69$; $\cos\beta = -\ 0,42$

$\cos\delta = \vec{u}_z / |\ \vec{u}\ |$; $\cos\beta = 3/4,69$; $\cos\delta = 0,63$

Vectores $\vec{v}$ y $\vec{z}$ los desarrollamos igual que $\vec{u}$.

5.- Vector Unitario

Recordando el concepto de vector unitario. Importante
http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/vectores

Vectores Unitarios
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

Vectores Unitarios
https://definicion.de/vector-unitario/

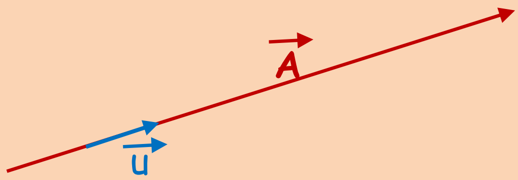
Vectores unitarios
http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/vectores

Vector Unitario
https://www.youtube.com/watch?v=cfe-IS-gNoU

Vector Unitario

Los vectores unitarios tienen por módulo la *UNIDAD*.

Normalizar un vector $\vec{A}$ consiste en obtener otro vector unitario, $\vec{u}$, de la misma dirección y sentido que el vector dado:



Para determinar el vector unitario nos basamos en: Todo vector es igual al módulo de dicho vector por el vector unitario en la dirección y sentido del mismo.

$$\vec{A} = |\vec{A}| \cdot \vec{u} \quad ; \quad \vec{u} = \vec{A} / |\vec{A}|$$

$\vec{u}$ **= Vector Unitario**

Ejemplo resuelto

Dado el vector $\vec{V}$ (3,4) determinar el vector unitario de su misma dirección y sentido.

Resolución

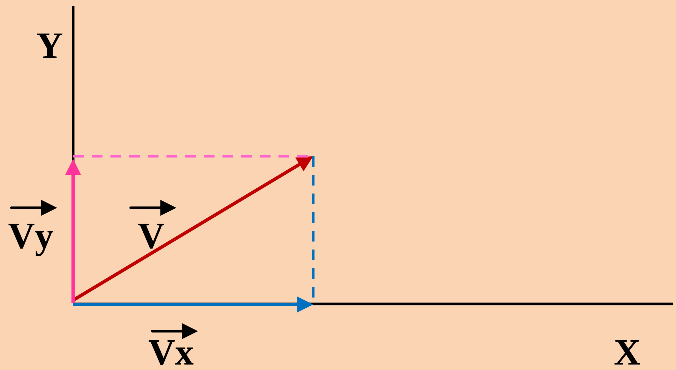
$$\vec{u} = \vec{V} \ / \ |\vec{V}| \qquad (2)$$

$$|\vec{V}| = (3^2 + 4^2)^{1/2} = (25)^{1/2} = 5$$

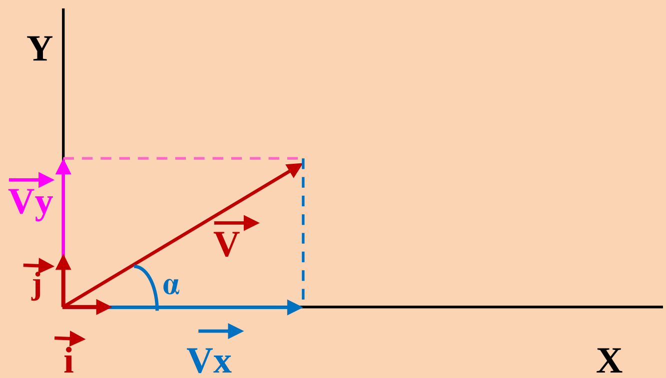
Si nos vamos a la ecuación (1):

$$\vec{u} = (3,4)/5 = (3/5 \ , \ 4/5)$$

Los vectores unitarios en el plano XY nos proporcionan otra posibilidad de representar un vector. Volvamos a la gráfica:



Vamos a normalizar el vector $\vec{V}$:



$\vec{i}$ es el vector unitario de la componente x del vector $\vec{V}$.

$\vec{j}$ es el vector unitario de la componente y del vector $\vec{V}$.

Se estableció que:

$$\vec{V} = \vec{Vx} + \vec{Vy} \quad (1)$$

Ahora sabemos que:

$$\vec{Vx} = |\vec{Vx}| \cdot \vec{i}$$

$$\vec{Vy} = |\vec{Vy}| \cdot \vec{j}$$

Nos vamos a la ecuación (1):

$$\vec{V} = |\vec{Vx}| \cdot \vec{i} + |\vec{Vy}| \cdot \vec{j}$$

Ejemplo
Dado el vector $\vec{V}$ de componentes (3,-5), normalizarlo.

Resolución

Normalizar un vector consiste en ponerlo en función de sus vectores unitarios, es decir, manifestar las componentes del vector $\vec{V}$ en función de sus componentes según los ejes de coordenadas.

Recordemos:

$$\vec{V} = |\vec{Vx}| \cdot \vec{i} + |\vec{Vy}| \cdot \vec{j}$$

$\vec{V} = 3 \cdot \vec{i} + (-5) \cdot \vec{j}$; $\vec{V} = 3 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}$

Ejercicio resuelto

Normalizar los siguientes vectores: $\vec{u}\,(1,\ 2^{1/2})$; $\vec{v}\,(-4,3)$ y $\vec{w}\,(8,-8)$.

Resolución

Normalizar un vector consiste en hallar el vector unitario en su misma dirección y sentido. Por tanto:

a)

$\vec{u}\,(1,\ -3)$

Llamemos $\vec{v}$ al vector unitario en dirección y sentido del vector $\vec{u}$.

$$\vec{V} = \frac{(\vec{u}_x, \vec{u}_y)}{|\vec{u}|} = (\vec{u}_x / |\vec{u}|,\ \vec{u}_y / |\vec{u}|) \quad (1)$$

$\vec{u}_x = 1$
$\vec{u}_y = -3$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(1^2 + (-3)^2} = (10)^{1/2}$$

Nos vamos a la ecuación (1):

$V\ [\ 1/(10)^{1/2}\ ,\ -3/(10)^{1/2}]$

b)Igual a a).
c)Igual a a).

Ejercicio resuelto

Si $\vec{V}$ es un vector de componentes (3,4), hallar el vector unitario en su misma dirección y sentido.

Resolución

$\vec{u}$ = Vector Unitario = (Vx/|V|. Vy/|v|)

$|\vec{V}| = (|\vec{V}x|^2 + |\vec{V}y^2|)$

$|\vec{V}| = [(3^2 + 4^2]^{1/2} = 5$

Nos vamos a (1):

$\vec{u}$ (3/5,4/5)

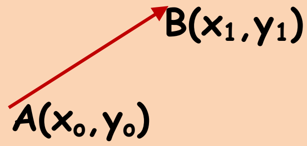
Ejercicio resuelto

Dado el vector $\vec{u}$ (2,-1), determinar dos vectores equipolentes a $\vec{u}$, $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$, sabiendo que A(1,-3) y D(2,0).

Resolución

Si nos basamos en la equipolencia de vectores tenemos que conocer que los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ tienen el mismo módulo. Esto nos permite establecer:

Vector $\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{AB}$ [(x_1 – 1), (y_1 – (-3))]

$\overrightarrow{AB}$ [(x_1 – 1) (y_1 +3)]

Como | $\vec{u}$ | = | $\overrightarrow{AB}$ |

Los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AB}$ deben tener las mismas componentes:

$(2,-1) = [\ (x_1 - 1\ )\ ,\ (\ y_1 + 3)\ ]$

$2 = x_1 - 1$; $x_1 = 2 + 1$; $x_1 = 3$

$-1 = y_1 + 3$; $y_1 = -1 - 3 = -4$; $y_1 = -4$

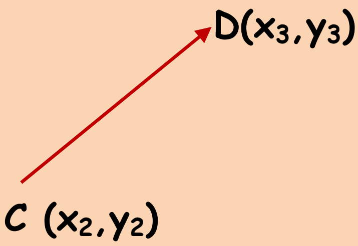
Luego el punto B es B (3,-4)

Por tanto:

$\overrightarrow{AB}$ [(3 – 1),(-4 – (-3)] $\rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ (2, -1)

$\overrightarrow{AB} = 2\ \vec{i} - \vec{j}$

Por otra parte:



$\overrightarrow{CD}\ [(x_3 - x_2), (y_3 - y_2)]$

$\overrightarrow{CD}\ [(2 - x_2), (0 - y_2)]$

El vector $\overrightarrow{CD}$ y $\vec{u}$ son equipolentes:

$(2,-1) = [(2 - x_2),(0 - y_2)]$

Por las mismas razones del vector $\overrightarrow{AB}$:

$2 = 2 - x_2 \quad ; \quad x_2 = 0$
$-1 = 0 - y_2 \quad ; \quad y_2 = 1$

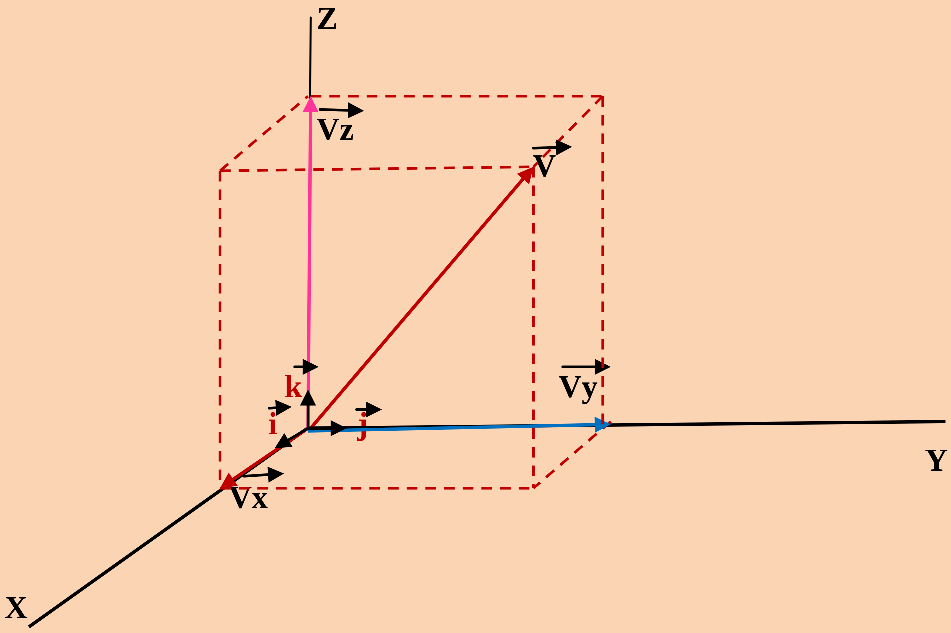
El punto C tiene de coordenadas $(x_2, y_2) \rightarrow$ C (0,1)

El vector $\overrightarrow{CB}\ [(2 - 0), (0 - 1)]$

$CB\ (2, -1) \quad ; \quad \overrightarrow{CB} = 2\,\vec{i} - \vec{j}$

Vectores Unitarios en el espacio R3

Si trabajamos en el espacio todo vector tiene tres componentes como se pone de manifiesto en la figura siguiente:



Podemos escribir al igual que en el plano las componentes cartesianas en el espacio (R3):

$\vec{V}\ (\ \vec{Vx}\ ,\ \vec{Vy}\ ,\ \vec{Vz}\ )$

También podemos establecer la igualdad:

$\vec{V} = \vec{Vx} + \vec{Vy} + \vec{Vz}$ (1)

En función de los vectores unitarios:

$\vec{Vx} = |\vec{Vx}| \cdot \vec{i}$ (eje Ox) , $\vec{i}$ = vector unitario eje Ox

$\vec{Vy} = |\vec{Vy}| \cdot \vec{j}$ (eje OY), $\vec{j}$ = vector unitario eje OY

$\vec{Vz} = |\vec{Vz}| \cdot \vec{k}$ (eje OZ), $\vec{k}$ = vector unitario eje OZ

La ecuación (1) pasa a ser:

$$\vec{V} = |\vec{Vx}| \cdot \vec{i} + |\vec{Vy}| \cdot \vec{j} + |\vec{Vz}| \cdot \vec{k}$$

Como en el plano, se cumple que el módulo de V es:

$$|\ \vec{V}\ | = [\ |\vec{Vx}|^2 + |\vec{Vy}|^2 + |\vec{Vz}|^2]^{1/2}$$

Ejercicio resuelto

Calcular el vector unitario con la misma dirección y sentido que el vector $\vec{v}$ (-1, 1, 2).

Resolución

Recordemos que el vector unitario de otro vector viene dado por la ecuación:

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\ \vec{V}\ |} \quad (1)$$

Dónde:

$\vec{u}$ = vector unitario en la dirección y sentido del vector V

Según ecuación (1):

$$\vec{u} = \frac{(-1,\ 1,\ 2)}{|\ \vec{V}\ |} \quad (2)$$

Calculamos el módulo del vector $\vec{V}$:

$| \vec{V} | = [(-1)^2 + 1^2 + 2^2]^{1/2}$; $V = (6)^{1/2} = 2,44$

Nos vamos a la ecuación (2):

$$\vec{u} = \frac{(-1,\ 1,\ 2)}{2,44} = (-1/2,44).\ \vec{i} + (1/2,44).\ \vec{j} + (2/2,44).\ \vec{k}$$

Ejercicio resuelto

Dado el vector $\vec{v} = 6\ \vec{i} + 8\ \vec{j} + 7\ \vec{k}$ se pide: a) Un vector unitario en su misma dirección. b) El ángulo que forma con el eje OY. c) Demostrar que la suma de los cuadrados de los cosenos directores vale la unidad.

Resolución

a)

$\vec{V} = 6\ \vec{i} + 8\ \vec{j} + 7\ \vec{k}$

$\vec{u}$ = vector unitario en la misma dirección que $\vec{V}$

Recordemos que:

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\ \vec{V}\ |} = \frac{(6\ \vec{i} + 8\ \vec{j} + 7\ \vec{k})}{|\ \vec{V}\ |} \qquad (1)$$

$| \vec{V} | = (6^2 + 8^2 + 7^2)^{1/2} = (36 + 64 + 49)^{1/2} = 12,2$

Nos vamos a la ecuación (1):

$$\vec{u} = \frac{(6\,\vec{i} + 8\,\vec{j} + 7\,\vec{k})}{12,2} = 0,49\,\vec{i} + 0,65\,\vec{j} + 0,57\,\vec{k}$$

b)

$$\vec{V} = 6\,\vec{i} + 8\,\vec{j} + 7\,\vec{k}$$

$\cos\alpha = V_x/|\,V\,| = 6 / 12,2 = 0,49 \rightarrow \alpha = 29,43^{o}$

$\cos\beta = V_y/|\,v\,| = 8/12,2 = 0,65 \rightarrow \beta = 40,54^{o}$

$\cos\delta = V_z/|\,V\,| = 7/12,2 = 0,57 \rightarrow \delta = 34,7^{o}$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\delta = 1$

$(0,49)^2 + (0,65)^2 + (0,57)^2 = 1$

$0,24 + 0,42 + 0,32 = 0,98 \approx 1$

Ejercicio resuelto

Dado un vector → a (3 , 4, -2), obtén su módulo y su dirección según los ejes OX, OY y OZ.

Resolución

a)

$$|\,\vec{a}\,| = [(3^2 + 4^2 + (-2)^2]^{1/2}$$

$$|\,\vec{a}\,| = (9 + 16 + 4)^{1/2} = 5,38$$

b)

La dirección de un vector viene determinada por sus cosenos directores:

$\cos \alpha = a_x / |\vec{a}| = 3/5,38 = 0,557$

$\cos \beta = a_y / |a| = 4/5,38 = 0,689$

$\cos \delta = a_z / |a| = -2/5,38 = -0,371$

Ejercicio resuelto

Calcule las componentes de un vector unitario de la misma dirección y sentido que el vector que tiene su origen en el punto P (3, 5, -5) y el extremo en el punto Q (5, -4, 1).

Resolución

$\overrightarrow{PQ} = [(5 - 3), (-4 -5), (1 - (-5)] = (2, -9, 6)$

$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} / |\overrightarrow{PQ}|$ (1)

$\vec{u}$ = vector unitario en la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}$.

Calculemos el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$:

$|\overrightarrow{PQ}| = [(2^2 + (-9)^2 + 6^2)]^{1/2}$

$= (4 + 81 + 36)^{1/2} = 11$

Podemos volver a la ecuación (1):

$\vec{u} = (2 \;.\; -9, 6)/11 = (2/11, -9/11, 6/11) =$

= (0,18, -0,81, 0,54)

Ejercicio resuelto

Un vector a tiene su origen en el punto O (3, 17) y el extremo en el punto P (10, -7). Calcule el vector unitario que tiene su misma dirección pero sentido contrario.

Resolución

O (3, 17)
P (10, -7)

$\overrightarrow{OP}$ = [(10 -3) i + (-7 – 17) j
$\overrightarrow{OP}$ = 7 i – 24 j

El vector opuesto a $\overrightarrow{OP}$ es el vector $\overrightarrow{PO}$:

$\overrightarrow{PO}$ = [(3 – 10) $\overrightarrow{i}$ + (17 – (-7) $\overrightarrow{j}$]

$\overrightarrow{PO}$ = - 7 i + 24 j

Su vector unitario:

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PO} / |\overrightarrow{PO}|$ (1)

Calculamos el módulo del vector opuesto:

$| \overrightarrow{PO} | = [(-7)^2 + 24^2)^{1/2}$

$| \overrightarrow{PO} | = (625)^{1/2} = 25$

Volvemos a la ecuación (1):

$\vec{u} = (-7\,\vec{i} + 24\,\vec{j})/ 25$

$\vec{u} = (-7/25\,\vec{i} + 24/25\,\vec{j})$

$\vec{u} = -\,0,28\,\vec{i} + 0,96\,\vec{j}$

Ejercicio resuelto

Determine las componentes de un vector de módulo 6 de igual dirección y sentido que el vector A (6, -6, -3).

Resolución

Nuestro vector problema tiene los mismos cosenos directores que el vector A (6, -6, -3). Caculamos los cosenos directores de A:

$\cos \alpha = 6/|\,\vec{A}\,|$

$\cos \beta = -6/|\,\vec{A}\,|$

$\cos \delta = -3/|\,\vec{A}\,|$

$|\,\vec{A}\,| = [(6)^2 + (-6)^2 + (-3)^2]^{1/2} = 9$

Nuestros cosenos directores tienen los valores:

$\cos \alpha = 6/|\,A\,| = 6/9 = 0,66$
$\cos \beta = -6/|\,A\,| = -6/9 = -\,0,66$
$\cos \delta = -3/|\,A\,| = -3/9 = -\,0,33$

Si llamamos a nuestro vector problema $\vec{B}$ se cumplirá:

Debemos conocer el vector $\vec{B}$ (Bx, By, Bz)

$|\vec{B}| = 6$

$\cos \alpha = |\vec{Bx}|/|\vec{B}|$

$\cos \beta = |\vec{By}|/|\vec{B}|$

$\cos \delta = |\vec{Bz}|/|\vec{B}|$

Recordemos que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen los mismos cosenos directores:

$0,66 = Bx/6 \rightarrow Bx = 0,66 \cdot 6 = 3,96$

$-0,66 = By/6 \rightarrow By = (-0,66) \cdot 9 = -3,96$

$-0,33 = Bz/6 \rightarrow Bz = (-0,33) \cdot 9 = -1,98$

Luego:

$\vec{B} = 3,97\,\vec{i} - 3,96\,\vec{j} - 1,98\,\vec{k}$

6.- Suma de Vectores

Video: Suma de vectores
http://www.youtube.com/watch?v=Jk3PhjaNSvw

Suma de Vectores
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

Suma de Vectores
http://www.jfinternational.com/mf/suma-vectores-fisica.html

Animación: Suma de Vectores
https://www.youphysics.education/es/magnitudes-escalares-y-vectoriales/suma-y-resta-de-vectores/

Simulador: Suma de Vectores
https://www.youtube.com/watch?v=kCAI3LKd-bI

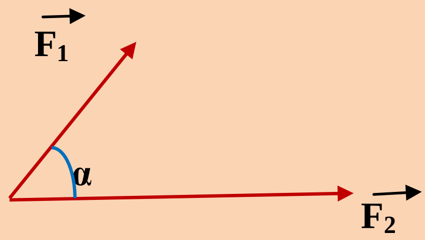
Simulador: Suma de Vectores
https://www.educaplus.org/game/suma-de-vectores

Enfocaremos el desarrollo bajo puntos de vista diferentes:

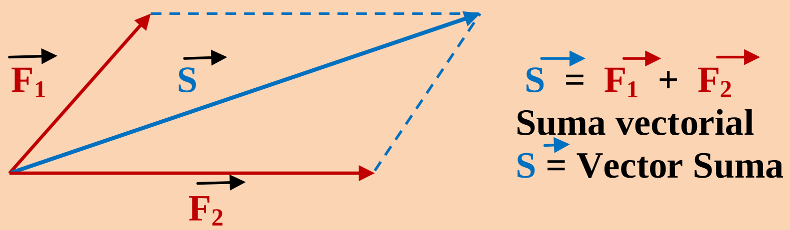
a) **Gráficamente**
b) **Determinando las componentes vectoriales del vector Suma**

Gráficamente:

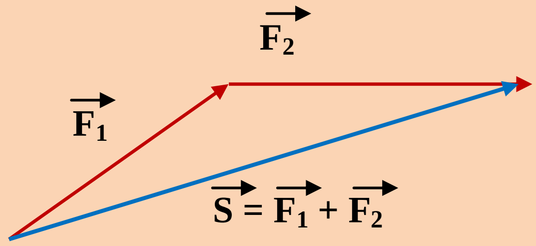
Supongamos los vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, que forman entre ellos un ángulo α, como muestra la figura adjunta:



La suma de estos dos vectores concurrentes en sus puntos origen la podemos realizar mediante la regla del paralelogramo. Consiste en trazar desde el extremo del primer vector un vector paralelo al segundo vector y trazar desde el extremo del segundo vector otro paralelo al primer vector:

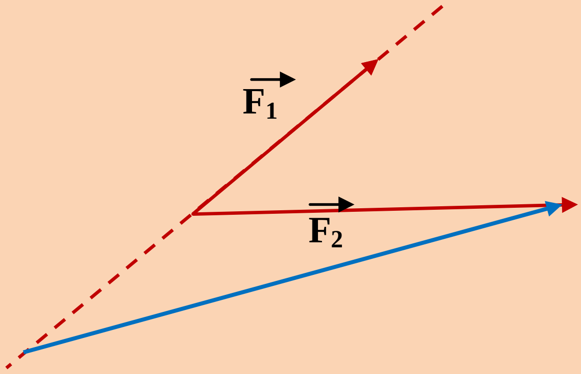


Puede ocurrir la circunstancia que los vectores sean concurrentes en el extremo de uno de los vectores y el origen del otro:

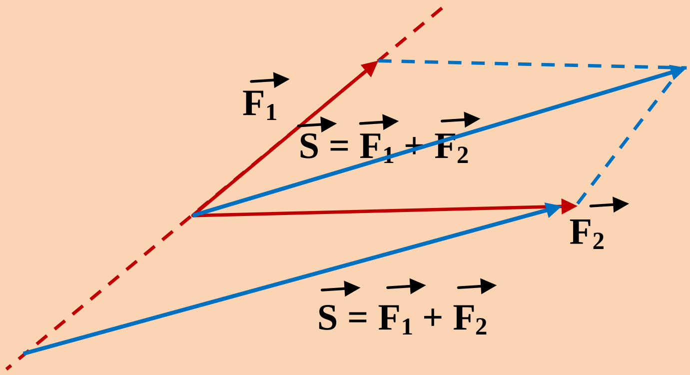


Si nos basamos en las características de los vectores deslizantes y vectores equipolentes podremos utilizar la regla del paralelogramo y llegar a las mismas conclusiones que en el primer método gráfico:

Deslizaremos el vector F_1:

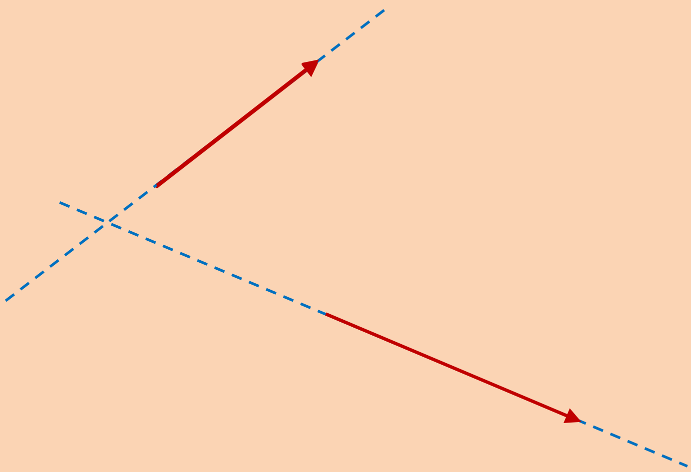


Aplicamos la regla del paralelogramo:

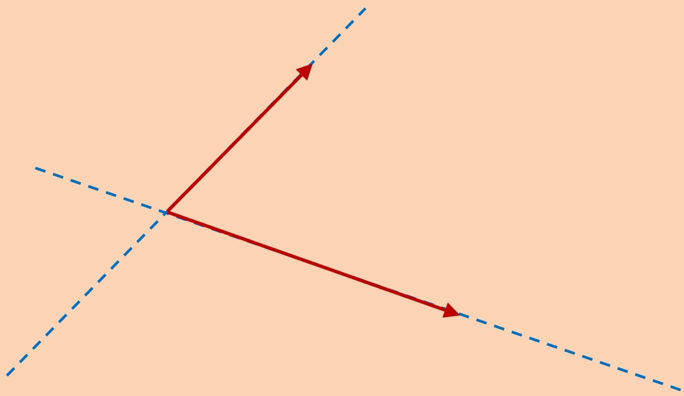


Los dos vectores $\vec{S}$ son equipolentes, es decir, mismo módulo, misma dirección y mismo sentido (paralelos).

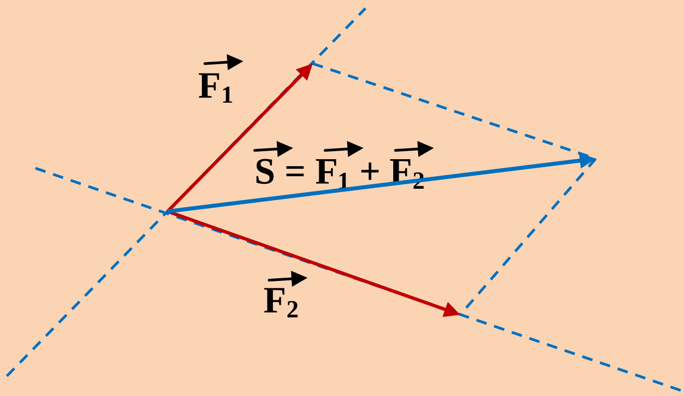
Podríamos suponer que las dos fuerzas actúan sobre el mismo cuerpo pero no son vectores concurrentes:



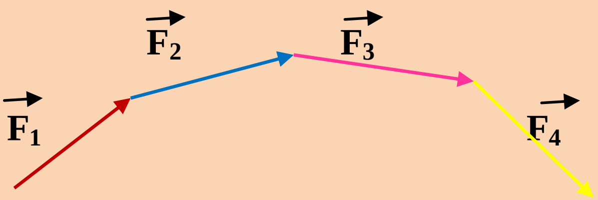
Deslizamos los dos vectores hasta que concurran en un punto:



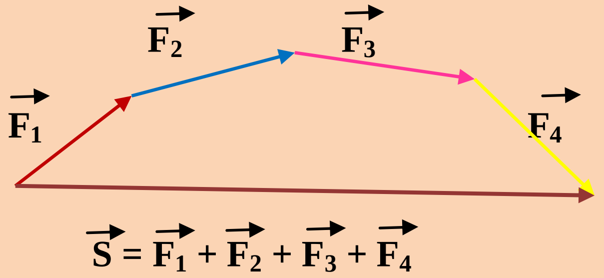
Podemos aplicar la regla del paralelogramo:



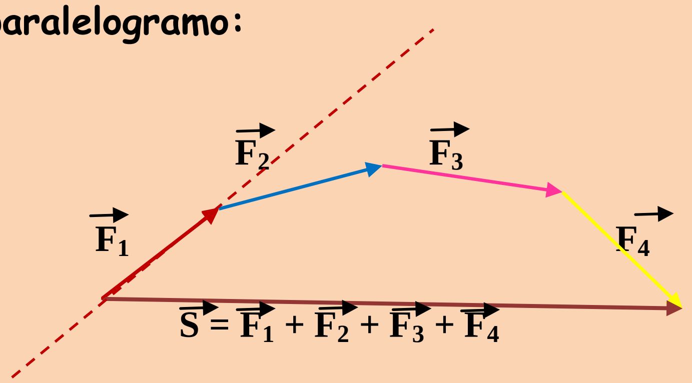
Otra circunstancia que nos podemos encontrar es la determinación del vector suma del esquema adjunta:



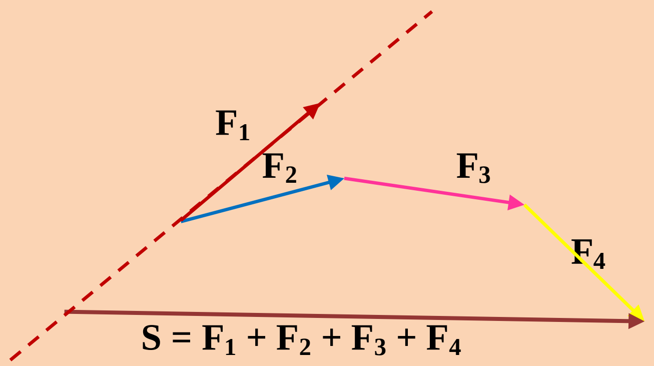
El vector suma es un vector que tiene su origen en el origen del primer vector, F_1, y su extremo en el extremo del último vector, F_4:



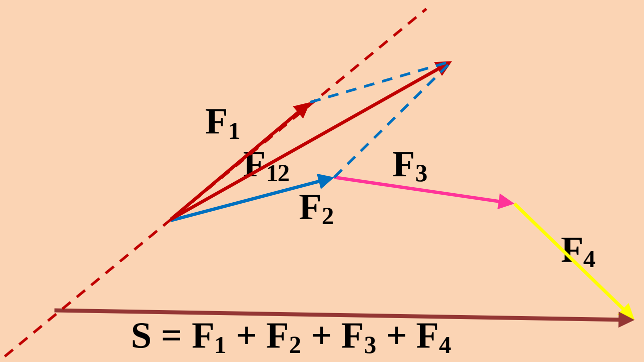
Este vector suma se puede obtener gráficamente por deslizamiento, equipolencia de vectores y regla del paralelogramo:



Deslizamos F_1:



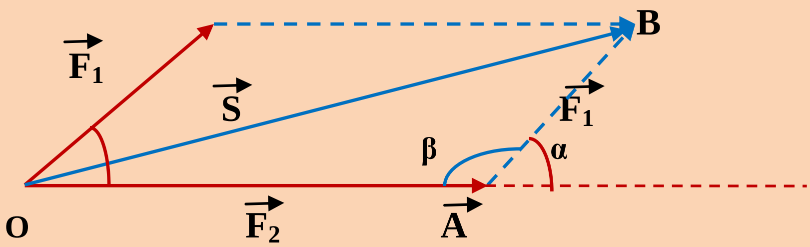
Aplicamos la regla del paralelogramo entre $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$:



A continuación haremos lo mismo con $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_3$ hasta llegar a la F_{123} con F_4 y obtendremos un vector equipolente al vector Suma.

Módulo del vector Suma

Mediante el **Teorema del coseno** podemos establecer el módulo del vector suma:



Tomemos el triángulo $\widehat{OAB}$ y apliquemos el **Teorema del coseno**:

$$S^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2\ F_1\ .\ F_2\ .\ \cos\beta$$

"α" y "β" son ángulos suplementarios y se cumple:

$\cos\beta = -\cos\alpha$

$S^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2\ F_1 \,.\, F_2 \,.\, (-\cos \alpha)$

$S^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \,.\, F_1 \,.\, F_2 \,.\, \cos \alpha$

$S = (F_1^2 + F_2^2 + 2 \,.\, F_1 \,.\, F_2 \,.\, \cos\alpha)^{1/2}$

Todo lo que hemos hecho hasta el momento es el trabajo con vectores desde el punto de vista gráfico, obteniendo el módulo de la resultante de un conjunto de vectores. Hemos utilizado el módulo de todos los vectores aplicados hasta el momento.

Ejercicio resuelto

Encuentre el ángulo entre dos vectores de 10 y 15 unidades de longitud sabiendo que su resultante tiene 20 unidades de longitud.

Resolución

Recordar:

$S = (F_1^2 + F_2^2 + 2 \,.\, F_1 \,.\, F_2 \,.\, \cos \alpha)^{1/2}$

F_1 = 10 udl
F_2 = 15 udl
S = 20 udl

$20^2 = 10^2 + 15^2 + 2 \,.\, 10 \,.\, 15 \,.\, \cos \alpha$
$400 = 100 + 225 + 300 \cos \alpha$
$400 - 100 - 225 = 300 \cos \alpha \quad ; \quad 75 = 300 \cos \alpha$
$\cos \alpha = 75/300 \quad ; \quad \cos \alpha = 0{,}25 \rightarrow \alpha = 75{,}5\ ^\circ$

6.1.- Determinación de las componentes del Vector Suma

Supongamos dos vectores F_1 y F_2, en función de sus componentes:

$$\vec{F_1} = F_{1x}\,\vec{i} + F_{1y}\,\vec{j} + F_{1z}\,\vec{k}$$

$$\vec{F_2} = F_{2x}\,\vec{i} + F_{2y}\,\vec{j} + F_{2z}\,\vec{k}$$

Vectorialmente se cumple:

$$\vec{S} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$\vec{S} = (F_{1x}\,\vec{i} + F_{1y}\,\vec{j} + F_{1z}\,\vec{k}) + (F_{2x}\,\vec{i} + F_{2y}\,\vec{j} + F_{2z}\,\vec{k}) =$$

$$= (F_{1x} + F_{2x})\,\vec{i} + (F_{1y} + F_{2y})\,\vec{j} + (F_{1z} + F_{2z})\,\vec{k}$$

Su módulo:

$$|\vec{S}| = [\,(F_{1x} + F_{2x})^2 + (F_{1y} + F_{2y})^2 + (F_{1z} + F_{2z})^2\,]^{1/2}$$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$, $\vec{v} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{z} = 8\,\vec{i} + \vec{j} - 3\,\vec{k}$. Determinar el vector unitario en la dirección y el sentido del vector $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{z}$.

Resolución

$\vec{S} = (3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}) + (2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k}) + (8\,\vec{i} + \vec{j} - 3\,\vec{k})$

$\vec{S} = 13\,\vec{i} - 7\,\vec{j} + \vec{k}$

$|\,\vec{S}\,| = [(13^2 + (-7)^2 + 1^2)]^{1/2} = 14,8$

Recordemos que todo vector es igual al módulo de dicho vector por el vector unitario en la dirección y sentido del vector:

$\vec{S} = |\,\vec{S}\,| \cdot \vec{u}$; $\vec{u} = \vec{S} / |\,S\,|$

$\vec{u} = (13\,\vec{i} - 7\,\vec{j} + \vec{k}) / 14,8$

$\vec{u} = 13/14,8\,\vec{i} - 7/14,8\,\vec{j} + 1/14,8\,\vec{k}$

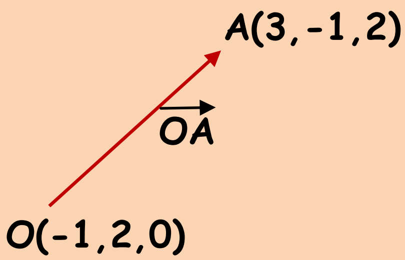
Ejercicio resuelto

Un vector tiene su origen en el punto O(-1,2,0) y su extremos en el punto A (3,-1,2). Calcular:

a) **El vector $\overrightarrow{OA}$**
b) **Módulo y cosenos directores**
c) **Vector unitario en la dirección de OA**

Resolución

a)



$\overrightarrow{OA}$ = [(3-)-1), (-1-2), (2 – 0) = (4, -3, 2)

$\overrightarrow{OA}$ (4,-3,2)

$\overrightarrow{OA} = 4\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$

b)

$|\overrightarrow{OA}| = [(4^2 + (-3)^2 + 2^2)]^{1/2} = (29)^{1/2}$

Cosenos directores:

$\cos \alpha = OAx / |OA| = 4/(29)^{1/2}$

$\cos \beta = OAy / |OA| = -3/(29)^{1/2}$

$\cos \lambda = OAz / |OA| = 2/(29)^{1/2}$

c)

Vector unitario

Recordemos $\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| \cdot \vec{u}$

$\vec{u} = \overrightarrow{OA} / |\overrightarrow{OA}| = (4\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 2\,\vec{k}) / (29)^{1/2}$

$\vec{u} = 4/(29)^{1/2}\,\vec{i} - 3/(29)^{1/2}\,\vec{j} + 2/(29)^{1/2}\,\vec{k}$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{A}$ (2,4,6) y $\vec{B}$ (1,-2,3). Determinar:

a) $\vec{A} + \vec{B}$

b) Ángulo que forman

Resolución

a)

$$\vec{A} + \vec{B} = (2\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 6\,\vec{k}) + (\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}) =$$

$$= [(2 + 1)\,\vec{i} + [(4 + (-2)]\,\vec{j} + (6 + 3)\,\vec{k} =$$

$$= 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 9\,\vec{k}$$

b)

Aplicando el teorema del coseno:

$$S^2 = A^2 + B^2 + 2 \,.\, A \,.\, B \cos \alpha$$

Debemos conocer los módulos del vector $\vec{S}$, $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$|\,\vec{S}\,| = S = (3^2+2^2+9^2)^{1/2} = (9 + 4 + 81)^{1/2} = (94)^{1/2}$$

$$|\,\vec{A}\,| = A = (2^2 + 4^2 + 6^2)^{1/2} = (56)^{1/2}$$

$$|\,\vec{B}\,| = B = [(1^2 + (-2)^2 + 3^2)]^{1/2} = (14)^{1/2}$$

$$[(94)^{1/2}]^2 = [(56)^{1/2}]^2 + [(14)^{1/2}]2 + 2.(56)^{1/2}.(14)^{1/2}.\cos \alpha$$

$$94 = 56 + 14 + 2 \,.\, 7{,}48 \,.\, 3{,}7 \,.\, \cos \alpha$$

94 – 56 – 4 = 55,35 cos α

34 = 55,35 cos α

cos α = 34 / 55,35 = 0,61 → α = 52,41°

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{A}$ (4, x, 0) y $\vec{B}$ (y, 5, 0) determinar x e y sabiendo que el vector suma es $\vec{S}$ (4, 2, 0).

Resolución

Recordemos:

$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$

(4, 2, 0) = (4, x, 0) + (y, 5, 0)

(4, 2, 0) = [(4 + y), (x + 5), (0 + 0)]

Se cumple que:

4 = 4 + y → y = 4 – 4 = 0

2 = x + 5 ; x = 2 – 5 = -3

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{A}$ (1, -1, 2) y $\vec{B}$ (-1, 3, 4) determinar el ángulo que forman.

Resolución

La ecuación que permite obtener el ángulo formado entre dos vectores es la derivada del Teorema del Coseno:

$S^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cos \alpha$ (1)

Debemos conocer:

.- El módulo del vector Suma
.- Los módulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Cálculo del vector Suma, $\vec{S}$:

$\vec{S} = (\vec{i} - \vec{j} + 2\,\vec{k}) + (-\vec{i} + 3\,\vec{j} + 4\,\vec{k}) =$

$= [\,[1 + (-1)]\,\vec{i} + [(-1) + 4]\,\vec{j} + (2 + 4)\,\vec{k}]$

$= 3\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$

$|\,\vec{S}\,| = (3^2 + 6^2)^{1/2} = (45)^{1/2}$

$|\,\vec{A}\,| = [(1^2 + (-1)^2 + 2^2]^{1/2} = (1 + 1 + 4)^{1/2} = (6)^{1/2}$

$|\,\vec{B}\,| = [(-1)^2 + 3^2 + 4^2)]^{1/2} = (26)^{1/2}$

Nos vamos a la ecuación (1) y sustituimos;

$S^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cos \alpha$

$[(45)^{1/2}]^2 = [(6)^{1/2}]^2 + [(26)^{1/2}]^2 + 2 \cdot (6)^{1/2} \cdot (26)^{1/2} \cdot \cos a$

$45 = 6 + 26 + 2 \cdot 2{,}45 \cdot 5{,}1 \cos \alpha$

$45 = 32 + 25 \cos \alpha$
$45 - 32 = 25 \cos \alpha$
$13 = 25 \cos \alpha$

Cos α = 13/25 = 0,52 → α = 58,7°

7.- Diferencia de vectores

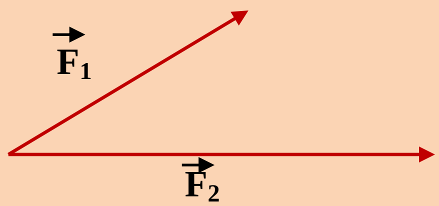
Video: Suma y resta de vectores. Método gráfico y analítico
http://www.youtube.com/watch?v=PuMfJalqorY

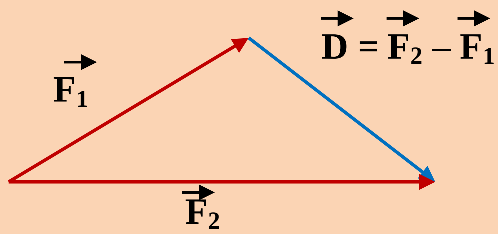
Resta de vectores
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

Animación interactiva de resta de vectores
http://jmora7.com/applets_2019/eso-4B/7-1-2_b/actividad.html

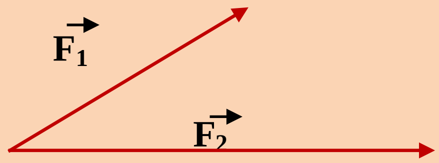
Gráficamente

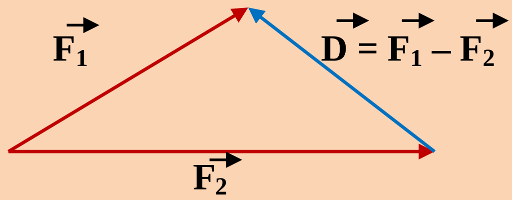
Supongamos dos vectores, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ en el gráfico siguiente:





También podría ser:

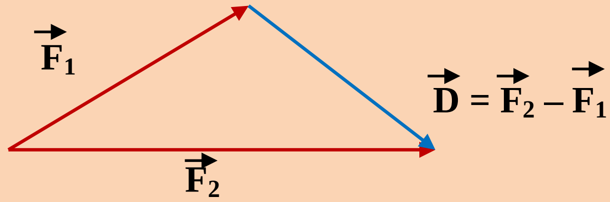




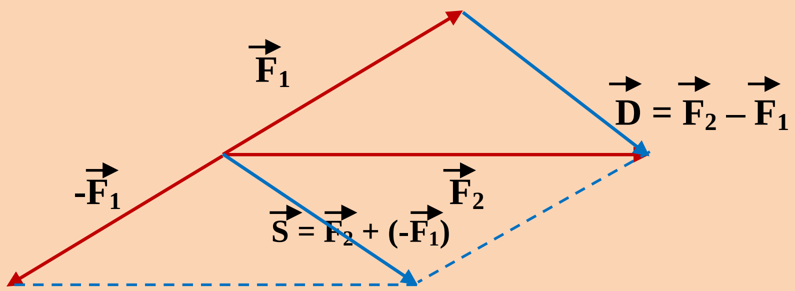
Fijaros en las puntas de flecha, son las que determinan el minuendo y el sustraendo de la ecuación de la Diferencia de vectores. El sustraendo es siempre el vector de donde parte el vector "Diferencia". Dicho de otra forma: el minuendo es siempre el vector que recibe la punta de flecha.

En los dos casos no podemos aplicar la regla del paralelogramo puesto que esta lo que nos permite es conocer gráficamente la suma de dos vectores. Sin embargo sí podemos encontrar el camino para la aplicación de dicha regla para obtener el vector "Diferencia".

Consideremos el primer caso:



Vamos a sumar a $\vec{F}_2$ el vector opuesto a $\vec{F}_1$:



Ahora sí podemos aplicar la regla del paralelogramo:

$$\vec{S} = \vec{F}_2 + (-\vec{F}_1) = \vec{F}_2 - \vec{F}_1 = \vec{D}$$

El vector $\vec{S}$ y el vector $\vec{D}$ son vectores equipolentes (mismo módulo y paralelos).

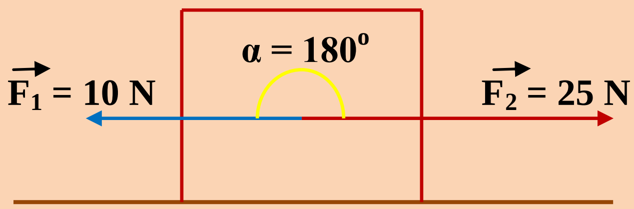
Podríamos hacer lo mismo con el segundo caso.

Podemos por tanto aplicar la ecuación nacida del teorema del Coseno sumando al minuendo el opuesto al sustraendo. Veamos un ejemplo práctico:

Sobre un cuerpo de masa 500 g actúan dos fuerzas, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, según el diagrama:

Determinar la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo.

Para obtener la fuerza resultante ampliamos un poco más el esquema vectorial anterior:



Recordar:

$$F_R = (F_2^2 + F_1^2 + 2.\ F_2\ .\ F_1\ .\ \cos \alpha)^{1/2}$$

$\alpha = 180^o \rightarrow \cos 180^o = -1$

$F_R = (F_2^2 + F_1^2 + 2\ .\ F_1\ .\ F_2\ .\ \cos 180^o)^{1/2}$

$F_R = [F_2^2 + F_1^2 + 2\ .\ F_1\ .\ F_2\ .\ (-1)]^{1/2}$

$F_R = (\underbrace{F_2^2 + F_1^2 - 2\ .\ F_1\ .\ F_2}_{\text{Desarrollo del cuadrado de una diferencia}})^{1/2}$

$F_R = [(F_2 - F_1)^2]^{1/2}$

$F_R = D = F_2 - F_1$

La fuerza que actúa sobre el cuerpo vale:

$F_R = 25 - 10 = 15\ N$

Si trabajamos con las componentes de vectores:

$\vec{F}_1 = F_{1x}\ \vec{i} + F_{1y}\ \vec{j} + F_{1z}\ \vec{k}$

$\vec{F}_2 = F_{2x}\ \vec{i} + F_{2y}\ \vec{j} + F_{2z}\ \vec{k}$

$\vec{D} = \vec{F_1} - \vec{F_2} = (F_{1x}\,\vec{i} + F_{1y}\,\vec{j} + F_{1z}\,\vec{K}) - (F_{2x}\,\vec{i} + F_{2y}\,\vec{j} + F_{2z}\,\vec{k}) =$

$\vec{D} = (F_{1x} - F_{2x})\,\vec{i} + (F_{1y} - F_{2y})\,\vec{j} + (F_{1z} - F_{2z})\,\vec{k}$

El módulo del vector Diferencia será:

$D = [\,(F_{1x} - F_{2x})^2 + (F_{1y} - F_{2y})^2 + (F_{1z} - F_{2z})^2]^{1/2}$

Ejercicio resuelto

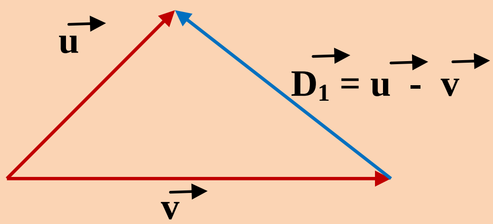
Dados los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$, $\vec{v} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k}$ **determinar:**

a) **El vector unitario en la dirección y sentido del vector** $\vec{D_1} = \vec{u} - \vec{v}$.
b) **El vector unitario en la dirección y sentido del vector** $\vec{D_2} = \vec{v} - \vec{u}$

Resolución

$\vec{u} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$
$\vec{v} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 1\,\vec{k}$

a) $\vec{D_1} = \vec{u} - \vec{v}$



$\vec{D_1} = (3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}) - (2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k}) =$

$= (3 - 2)\vec{i} + [(-2 - (-6)]\vec{j} + (3 - 1)\vec{k} =$

$= \vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$

Recordemos:

$\vec{D}_1 = |\vec{D}_1| \cdot \vec{a}$ $\qquad \vec{a}$ = vector unitario de D_1

$\vec{a} = \vec{D}_1 / |\vec{D}_1|$

Calculemos el módulo del vector D_1:

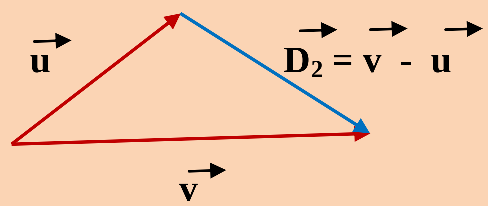
$|\vec{D}_1| = (1^2+4^2+2^2)^{1/2}$; $|\vec{D}_1| = (21)^{1/2} = 4,58$

$\vec{a} = (\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}) / 4,58$

$\vec{a} = 1/4,58\,\vec{i} + 4/4,58\,\vec{j} + 2/4,58\,\vec{k}$

$\vec{a} = 0,21\,\vec{i} + 0,87\,\vec{j} + 0,43\,\vec{k}$

b) $\vec{D}_2 = \vec{v} - \vec{u}$



$\vec{u} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$
$\vec{v} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 1\,\vec{k}$

$\vec{D}_2 = \vec{v} - \vec{u}$

$\vec{D}_2 = (2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k}) - (3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k})$

$\vec{D_2} = (2 - 3)\,\vec{i} + [(-6) - (-2)]\,\vec{j} + (1 - 3)\,\vec{k}$

$\vec{D_2} = -\,\vec{i} - 4\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$

$\vec{D_2} = |\vec{D_2}|\,.\,\vec{b}$; $\vec{b}$ = vector unitario D_2

$\vec{b} = \vec{D_2}/|\vec{D_2}|$

$\vec{b} = (2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k})/|\vec{D_2}|$

$|\vec{D_2}| = [(2^2 + (-6)^2 + 1^2)]^{1/2}$; $|\vec{D_2}| = (41)^{1/2} = 6{,}4$

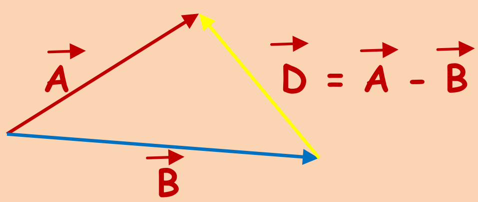
$\vec{b} = 2/6{,}4\,\vec{i} - 6/6{,}4\,\vec{j} + 1/6{,}4\,\vec{k}$

$\vec{b} = 0{,}31\,\vec{i} - 0{,}93\,\vec{j} + 0{,}15\,\vec{k}$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{A}$ (2, 4, 6) y $\vec{B}$ (1, -2, 3) calcular el vector "diferencia" $\vec{A} - \vec{B}$ y el vector unitario asociado a dicho vector.

Resolución



Componentes del vector diferencia:

$\vec{A} = 2\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 6\vec{k}$

$\vec{B} = [(\vec{i} + (-\ 2)\ \vec{j} + 3\ \vec{k}] = \vec{i} - 2\ \vec{j} + 3\ \vec{k}$

$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = (2\ \vec{i} + 4\ \vec{j} + 6\vec{k}) - (\vec{i} - 2\ \vec{j} + 3\ \vec{k}) =$

$= [(2 - 1)\ \vec{i} + (4 - (-2)\ \vec{j} + (6 - 3)\vec{k}] =$

$= \vec{i} + 6\ \vec{j} + 3\ \vec{k}$

Vector unitario del vector $\vec{D}$:

Recordemos:

$\vec{D} = |\ \vec{D}\ |\ .\ \vec{u}$; $\vec{u}$ = **Vector unitario de** $\vec{D}$

Despejamos $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{D}}{|\ \vec{D}\ |} = \frac{\vec{i} + 6\ \vec{j} + 3\ \vec{k}}{|\ \vec{D}\ |} \quad (1)$$

Cálculo de $|\ D\ |$:

$|\ \vec{D}\ | = (1^2 + 6^2 + 3^2)^{1/2} = (46)^{1/2}$

Nos vamos a la ecuación (1):

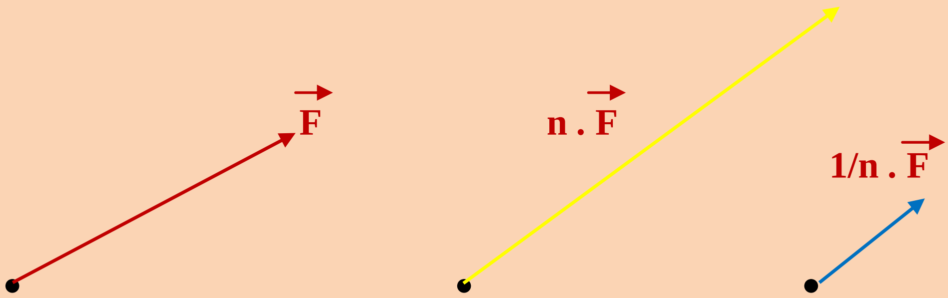
$$u = \frac{\vec{i} + 6\ \vec{j} + 3\ \vec{k}}{(46)^{1/2}} = 1/(46)^{1/2}\ \vec{i} + 6/(46)^{1/2}\ \vec{j} + 3/(46)^{1/2}\ \vec{k}$$

8.- Producto de un Escalar por un Vector

Del producto de un escalar por un vector obtenemos otro vector de la misma dirección, del mismo sentido y de módulo tantas veces mayor o menor, según sea el escalar (entero o fracción)

$\vec{T} = n \cdot \vec{F}$

Sea el vector $F = Fx\ \vec{i} + Fy\ \vec{j} + Fz\ \vec{k}$



Desarrollemos la igualdad $\vec{T} = n \cdot \vec{F}$

$\vec{T} = n \cdot (Fx\ \vec{i} + Fy\ \vec{j} + Fz\ \vec{k})$

$\vec{T} = nFx\ \vec{i} + nFy\ \vec{j} + nFz\ \vec{k}$

$$|\vec{T}| = [(nFx)^2 + (nFy)^2 + (nFz)^2]^{1/2} =$$

$$= (n^2 \cdot Fx^2 + n^2 \cdot Fy^2 + n^2 \cdot Fz^2)^{1/2} =$$

$$= [n^2 (Fx^2 + Fy^2 + Fz^2)]^{1/2} =$$

$$= n \cdot (Fx^2 + Fy^2 + Fz^2)^{1/2}$$

Como:

$$(Fx^2 + Fy^2 + Fz^2)^{1/2} = |\vec{F}|$$

Nos queda:

$$|\vec{T}| = n \cdot |\vec{F}|$$

n = Entero o fracción

Ejercicio resuelto

Dados los vectores:

$$\vec{u} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k} \quad ,$$

$$\vec{w} = 3\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 12\,\vec{k}$$

Determinar el módulo de los vectores:

a) $\vec{R} = 2\,\vec{u} - \vec{v} + 3/2\,\vec{w}$

b) $\vec{S} = 1/3\,\vec{u} + 2\,\vec{v} - 5\,\vec{w}$

Resolución

a)

$$\vec{R} = 2\,\vec{u} - 1\,\vec{v} + 3/2\,\vec{w} = 2\,(3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}) - (2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k})$$

$$+ 3/2\,(3\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 12\,\vec{k}) =$$

$$=6\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + 6\,\vec{k} - 2\,\vec{i} + 6\,\vec{j} - \vec{k} + 9/2\,\vec{i} - 18/2\,\vec{j} + 36/2\,\vec{k} =$$

$$= (6\ -2+9/2)\,\vec{i} + (-4 + 6 - 18/2)\,\vec{j} + (6 - 1 + 36/2)\,\vec{k} =$$

$$= 8{,}5\,\vec{i} - 7\,\vec{i} + 23\,\vec{k}$$

$$|\,\vec{R}\,| = (\,8{,}5^2 + (-7)^2 + 23^2)^{1/2}$$

$$|\,\vec{R}\,| = (\,72{,}25 + 49 + 529)^{1/2} = 650{,}25^{1/2} = 25{,}5$$

b)

$$S = 1/3\,\vec{u} + 2\,\vec{v} - 5\,\vec{w}$$

$$\vec{S} = 1/3\ (3\ i - 2\ j + 3\ k) + 2\ (2\ i - 6\ j + k) - 5\ (3\ i - 6\ j + 12\ k)$$

$$= i - 2/3\ j + k + 4i - 12\ j + 2\ k - 15\ i + 30\ j - 60\ k =$$

$$= (\ 1 + 4 - 15\ )\ i + (\ -2/3 - 12 + 30\ )\ j + (\ 1 + 2 - 60\ )\ k =$$

$$= -\ 10\,\vec{i} + 17{,}34\,\vec{j} - 57\,\vec{k}$$

$$|\,\vec{S}\,| = [(-10)^2 + (17{,}34)^2 + (\ -\ 57)^2]^{1/2} =$$

$$= (\ 100 + 300{,}67 + 3249)^{1/2} =$$

$$= (3649{,}67)^{1/2} = 60{,}41$$

9.- Producto Escalar de dos Vectores.

Video: Producto de un escalar por un vector
http://www.youtube.com/watch?v=6yn44Yrtxyo

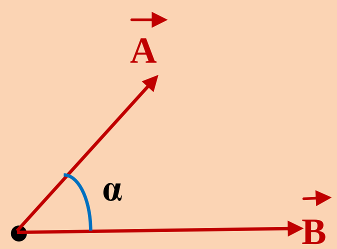
Producto de un Escalar por un Vector
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

Producto Escalar de dos Vectores
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

Video: Producto Escalar de dos vectores
https://www.youtube.com/watch?v=zdYEpOhIKb4

Simulador de Producto Escalar de dos vectores
https://www.geogebra.org/m/tmvZQMwr

Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se define producto escalar entre ellos, como el número (escalar) que se obtiene multiplicando el módulo de $\vec{A}$ por el módulo de $\vec{B}$ y por el coseno del ángulo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$$

Propiedades del producto escalar:

a) **Propiedad conmutativa:** $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

b) **Propiedad distributiva:** $\vec{A}\,(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

Vamos a desarrollar el producto escalar de dos vectores en función de los componentes de cada uno de ellos:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (Ax\,\vec{i} + Ay\,\vec{j} + Az\,\vec{k}) \cdot (Bx\,\vec{i} + By\,\vec{j} + Bz\,\vec{k}) =$$

$$= AxBx\,\vec{i} \cdot \vec{i} + AxBy\,\vec{i} \cdot \vec{j} + AxBz\,\vec{i} \cdot \vec{k} +$$

$$+ AyBx\,\vec{j} \cdot \vec{i} + AyBy\,\vec{j} \cdot \vec{j} + AyBz\,\vec{j} \cdot \vec{k} +$$

$$+ AzBx\,\vec{k} \cdot \vec{i} + AzBy\,\vec{k} \cdot \vec{j} + AzBz\,\vec{k} \cdot \vec{k}$$

Sabemos que:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \cdot 1 \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

También sabemos que los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ son ortogonales, es decir, forman entre ellos un ángulo de 90°. En base a ello:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$$

$\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$

$\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

$\vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

$\vec{k} \cdot \vec{j} = 0$

Podemos generalizar:

$i \perp j \perp k \perp i \rightarrow \alpha = 90° \rightarrow \cos 90° = 0$

De la expresión:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = (Ax\ i + Ay\ j + Az\ k) \cdot (Bx\ i + By\ j + Bz\ k) =$

$= AxBx\ i \cdot i + AxBy\ \cancel{i \cdot j} + AxBz\ \cancel{i \cdot k} + AyBx\ \cancel{j \cdot i} +$

$+ AyBy\ j \cdot j + AyBz\ \cancel{j \cdot k} + AzBx\ \cancel{k \cdot i} + AzBy\ \cancel{k \cdot j} +$

$+ AzBz\ k \cdot k = AxBx \cdot 1 + AyBy \cdot 1 + AzBz \cdot 1 =$

$= AxBx + AyBy + AzBz$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$

Obtenemos otra expresión del producto escalar de dos vectores.

Ejercicio resuelto
Calcule el producto escalar de los vectores $\vec{A}$ (5, -2 , 1) y $\vec{B}$ (-1 , 3 , -2).

Resolución

Puesto que el ejercicio no nos determina el ángulo que forman los vectores, para poder obtener el producto escalar utilizaremos la ecuación:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 5 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = - 5 - 6 - 2 = -13$

Ejercicio resuelto
Determinar el ángulo que forman los dos vectores del ejercicio anterior

Resolución

Recordemos que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha$$

$\cos\alpha = \vec{A} \cdot \vec{B} \,/\, |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$ (1)

El numerador es conocido luego calculemos los módulos de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$|\vec{A}| = (5^2 + (-2)^2 + 1^2)^{1/2} = 173^{1/2} = 13,15$

$|\vec{B}| = [(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2]^{1/2} = 14$

Volviendo a la ecuación (1)

cos α = -13/ (13,15 . 14) = - 13/ 184,1 = - 0,07

α = 94,01°

Ejercicio resuelto

Calcular el valor de "a" para que los vectores $\vec{u}$ = 3 i + 4 j – 2 k y $\vec{v}$ = a i – 2 j + 2 k formen un ángulo de 45°

Resolución

Recordemos que:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot v \cdot \cos \alpha$

$\cos \alpha = \vec{u} \cdot \vec{v} / u \cdot v$ **(1)**

De la ecuación anterior conocemos:

cos 45° = 0,7

$u = [(3^2 + 4^2 + (-2)^2]^{1/2} = (29)^{1/2} = 5,38$

$v = [(a^2 + (-2)^2 + 2^2]^{1/2} = (a^2 +8)^{1/2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 3a - 8 - 4 = 3a - 12$

Si nos vamos a (1):

$0,7 = (3a - 12)/ 5,38 \cdot (a^2 +8)^{1/2}$

Trabajando matemáticamente:

$0,7 \cdot 5,38 \cdot (a^2 + 8)^{1/2} = 3a - 12$

$(a^2 + 8)^{1/2} = (3a - 12)/ (0,7 \cdot 5,38)$

$(a^2 + 8)^{1/2} = (3a - 12)/3,76$

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$a^2 + 8 = (3a - 12)^2/14,13$

$14,13 \cdot (a^2 + 8) = 9a^2 + 144 - 72a$

$14,13\, a^2 + 113,04 = 9a^2 + 144 - 72a$

$14,13\, a^2 - 9a^2 - 72a + 113,04 - 144 = 0$

$5,13\, a^2 - 72\, a - 30,96 = 0$

$a = 72 \pm (5184 + 635,29)^{1/2}/ 10,26$

$a = (72 \pm 76,28)/10,26$

$a_1 = (72 + 76,28)/10,26 = 14,45$

$a_2 = (72 - 76,28)/10,26 = -0,41$

Ejercicio resuelto

Determinar el valor del parámetro "a" para que los vectores $\vec{x} = a\, i - 2\, j + 3\, k$; $\vec{y} = -\, i + a\, j + k$ sean perpendiculares.

Resolución

Si los vectores son perpendiculares el ángulo que forman entre ellos es de 90°. Esto implica:

$\vec{x} \cdot \vec{y} = x \cdot y \cdot \cos \alpha$

$\vec{x} \cdot \vec{y} = x \cdot y \cdot \cos 90° = x \cdot y \cdot 0 = 0$

Para que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar debe ser igual a cero.

También sabemos que:

$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_x y_x + x_y y_y + x_z y_z$

Por lo que:

$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_x y_x + x_y y_y + x_z y_z = 0$

$\vec{x} = a\,i - 2\,j + 3\,k$;

$\vec{y} = -\,i + a\,j + k$

$a \cdot (-1) + (-2) \cdot a + 3 \cdot 1 = 0$

$-a - 2a + 3 = 0$

$-3a = -3$

$a = 1$

Ejercicio resuelto

Dado los vectores $\vec{A}$ (4 , -3 , 0) y $\vec{B}$ (8 , 6 , 0), calcula:

a) $2\ \vec{A} + \vec{B}$
b) El producto escalar de $\vec{A}\ .\ \vec{B}$.
c) El ángulo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Resolución

a) $2\ \vec{A} + \vec{B} = 2\ (\ 4\ i + -3\ j) + (\ 8\ i + 6\ j +) =$

$= 8\ i - 6j + 8\ i + 6\ j = 16\ \vec{i}$

b)

$\vec{A}$ (4 , -3 , 0), $\vec{B}$ (8 , 6 , 0)

$\vec{A}\ .\ \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz = 4\ .\ 8 + (-3)\ .\ 6 =$

$= 32 - 18 = 14$

c)

$\vec{A}\ .\ \vec{B} = A\ .\ B\ .\ \cos\alpha$

$\cos\alpha = \vec{A}\ .\ \vec{B}\ /\ A\ .\ B$

$A = (\ 4^2 + (-3)^2 +)^{1/2} = 25^{1/2} = 5$

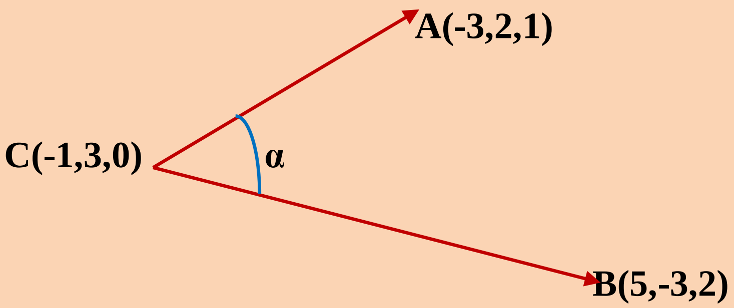
$B = (\ 8^2 + 6^2)^{1/2} = 10$

$\cos\alpha = 14\ /\ (5\ .\ 10)$
$\cos\alpha = 0,28 \rightarrow \alpha = 73,73°$

Ejercicio resuelto

Dos vectores cuyos extremos son los puntos A(-3,2,1) y B(5,-3,2), tienen como origen común el punto C(-1,3,0). Calcular el producto escalar de ambos vectores y el ángulo que forman.

Resolución



$\vec{CA}$ [(-3) – (-1) , (2 – 3) , (1 – 0)] ; $\vec{CA}$ (-2 , -1 , 1)

$\vec{CB}$ [5 – (-1) , (-3) – 3 , (2 – 0)] ; $\vec{CB}$ (6 , -6 , 2)

$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos\alpha$ (1)

Por otra parte:

$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CAxCBx + CAyCBy + CAzCBz =$

$= (-2).6 + (-1).(-6) + 1.2 = -12 + 6 + 2 = -4$

De (1):

$\cos\alpha = \vec{CA} \cdot \vec{CB} \,/\, CA \cdot CB$ (2)

$CA = [(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2]^{1/2} = 6^{1/2} = 2,45$

$CB = [\,6^2 + (-6)^2 + 2^2]^{1/2} = 76^{1/2} = 8,72$

Nos vamos a (2):

$\cos\alpha = (-4) / (2,45 \,.\, 8,72) = -4/21,36 = -0,18$

$\alpha = 100,4^\circ$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{a} = 3\,i + 5\,j - k$ y $\vec{b} = i + 4\,j - 2\,k$, calcula el producto escalar siguiente: $(\vec{a} - 5\vec{b}) \,.\, (2\,\vec{a} + \vec{6}\,b)$

Resolución

$5\,\vec{b} = 5\,(i + 4\,j - 2\,k) = 5\,i + 20\,j - 10\,k$

$2\,\vec{a} = 2\,(3\,i + 5\,j - k) = 6\,i + 10\,j - 2\,k$

$6\,\vec{b} = 6\,(i + 4\,j - 2\,k) = 6\,i + 24\,j - 12\,k$

$(\vec{a} - 5\,\vec{b}) = (3\,i + 5\,j - 2\,k) - (5\,i + 20\,j - 10\,k) =$

$= -2\,\vec{i} - 15\,\vec{j} + 8\,\vec{k}$

$(2\,\vec{a} + 6\,\vec{b}) = 6\,i + 10\,j - 2\,k + 6\,i + 24\,j - 12\,k =$

$= 12\,\vec{i} + 34\,\vec{j} - 14\,\vec{k}$

Luego:

$$(\vec{a} - 5\,\vec{b}) \,.\, (2\,\vec{a} + 6\,\vec{b}) = (-2)\,.\,12 + (-15)\,.\,34 - 112 =$$

$$= -24 - 510 - 112 = -\,646$$

Ejercicio resuelto

Comprobar que los vectores $\vec{A} = 3\,i + 2\,j - k$; $\vec{B} = i + 3\,j - 5\,k$ y $\vec{C} = 2\,i - j + 4\,k$ forman un triángulo rectángulo.

Resolución

Cuando entre dos de los tres vectores dados exista un ángulo de 90° el triángulo será rectángulo. Tenemos que buscar el ángulo de 90°.

Debemos recordar que:

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = A\,.\,B\,.\,\cos\alpha \quad (1)$$

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz \quad (2)$$

$$A = [\,3^2 + 2^2 + (-1)^2]^{1/2} = 3{,}74$$

$$B = [\,1^2 + 3^2 + (-5)^2]^{1/2} = 5{,}91$$

$$C = [\,2^2 + (-1)^2 + 4^2]^{1/2} = 4{,}58$$

Recordemos también que el producto escalar es conmutativo. De la ecuación (2) obtenemos:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-5) = 3 + 6 + 5 = 14$

$\vec{A} \cdot \vec{C} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 = 6 - 2 - 4 = 0$

$\vec{B} \cdot \vec{C} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 4 = 2 - 3 - 20 = 21$

De la ecuación (1):

$\cos \alpha = \vec{A} \cdot \vec{B} / A \cdot B$

$\cos \alpha = (14/ 14) \cdot 5{,}91 = 14/82{,}74 = 0{,}169$

$\alpha = 80{,}25^{\circ}$

$\cos \beta = \vec{A} \cdot \vec{C} / A \cdot C$

$\cos \beta = (0/3{,}74) \cdot 4{,}58 = 0 \;\; ; \;\; \beta = 90^{\circ}$

Aquí tenemos el ángulo que estábamos buscando y efectivamente se trata de un triángulo rectángulo.

Ejercicio resuelto
Dado el vector $\vec{a}$ (-1,2,4) halla el producto escalar de dicho vector por su vector unitario.

Resolución

Sabemos que:

$\vec{A} = |\vec{A}| \cdot \vec{u}$

Podemos despejar el vector unitario $\vec{u}$:

$\vec{u} = \vec{A} / |\vec{A}|$ (1)

Podemos calcular el módulo del vector $\vec{A}$:

$|\vec{A}| = [(-1)^2 + 2^2 + 4^2]^{1/2} = (21)^{1/2}$

Nos vamos a la ecuación (1) y sustituimos:

$\vec{u} = (-i + 2\,j + 4\,k) / (21)^{1/2} =$

$= -1/(21)^{1/2}\,\vec{i} + 2/(21)^{1/2}\,\vec{j} + 4/(21)^{1/2}\,\vec{k}$

Producto escalar de $\vec{A}$ por $\vec{u}$:

$\vec{A} \cdot \vec{u} = A_x u_x + A_y u_y + A_z u_x =$

$= (-\,i + 2\,j + 4) \cdot (-\,1/(21)^{1/2}\,i + 2/(21)^{1/2}\,j + 4/(21)^{1/2}\,k =$

$= 1/(21)^{1/2} + 4/(21)^{1/2} + 16/(21)^{1/2} = 21/(21)^{1/2}$

Ejercicio resuelto

Calcular m para que los vectores $\vec{a} = m\,i + 4\,j + 5\,k$ y $\vec{b} = -\,i + m\,j - 2\,k$ sean perpendiculares.

Resultado

Para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares se debe cumplir que el ángulo comprendido entre los dos vectores sea de 90°. Recordemos:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha$

El ángulo $\alpha = 90° \rightarrow \cos 90° = 0$

Por lo que:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot 0 = 0$

El producto escalar de $\vec{a}$ por $\vec{b}$ debe ser igual a cero.

Por otra parte sabemos que:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = axbx + ayby + azbz$

$axbx + ayby + azbz = 0$

$\vec{a} = m\ i + 4\ j + 5\ k$
$\vec{b} = -\ i + m\ j - 2\ k$

$(m\ i + 4\ j + 5\ k) \cdot (-\ i + m\ j - 2\ k) = 0$

$-m + 4\ m - 10 = 0$

$3m = 10\ ;\ \ m = 10/3$

Ejercicio resuelto

a)Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ = (2, 1, 1) y $\vec{v}$ = (-1, 1, 1).
b) ¿Cuánto debe valer a para que los vectores $\vec{u}$ = (2, a, 1) y $\vec{v}$ = (-1, a, 1) sean perpendiculares.

Resolución

a)

Recordemos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \vec{u} \cdot \vec{v} \,/\, |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \quad (1)$$

Cálculo de los módulos:

$\vec{u}$ = (2, 1, 1)
$\vec{v}$ = (-1, 1, 1).

$$|\vec{u}| = (2^2 + 1^2 + 1^2)^{1/2} = (6)^{1/2}$$

$$|\vec{v}| = [(-1)^2 + 1^2 + 1^2]^{1/2} = (3)^{1/2}$$

Por otra parte sabemos que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

$\vec{u} = (2, 1, 1)$
$\vec{v} = (-1, 1, 1).$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$

Si nos vamos a la ecuación (1):

$\cos \alpha = 0 / [(6)^{1/2} \cdot (3)^{1/2}] = 0$

$\cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90°$

b)

Se ha demostrado en el apartado anterior que dos vectores serán perpendiculares cundo su producto escalar sea igual a 0.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

Se transforma en:

$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0$

Por lo tanto:

$2 \cdot (-1) + a \cdot a + 1 \cdot 1 = 0$

$-2 + a^2 + 1 = 0$

$-1 + a^2 = 0$

$a = (1)^{1/2} = 1$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores: $\vec{a} = i + j + 2\,k$ y $\vec{b} = i + 3\,j + 4\,k$. Calcular: a) el producto escalar de ambos vectores, b) el ángulo que forman.

Resolución

a)

El producto escalar de dos vectores viene determinado por la ecuación:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 1 + 3 + 8 = 12$$

b)

Recordemos que el producto escalar también se puede determinar por la ecuación:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$$

Despajamos cos α:

$$\cos \alpha = \vec{a} \cdot \vec{b} \,/\, |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \quad (1)$$

Calculamos los módulos de los vectores:

$\vec{a} = i + j + 2\,k$ y

$\vec{b} = i + 3\,j + 4\,k$

$|\,\vec{a}\,| = (1^2 + 1^2 + 2^2)^{1/2} = (6)^{1/2}$

$|\,\vec{b}\,| = (1^2 + 3^2 + 4^2)^{1/2} = (26)^{1/2}$

Nos vamos a la ecuación (1):

$\cos \alpha = 12 / [(6)^{1/2} \cdot (26)^{1/2}] = 12/12{,}75 = 0{,}9411$

$\cos \alpha = 0{,}9411 \rightarrow \alpha = 19{,}76^{o}$

Ejercicio resuelto

Calcular m para que los vectores $\vec{a}$ (m,-2) y $\vec{b}$ (3, 6) sean paralelos.

Resolución

Si son paralelos el ángulo que forman entre ellos de 0º lo que implica:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{A}\,| \cdot |\,\vec{B}\,| \cdot \cos \alpha$

$\vec{a} \cdot b = |\,\vec{A}\,| \cdot |\,\vec{B}\,| \cdot \cos 0^{o}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot 1$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \quad (1)$

$\vec{a}\,(m, -2)$
$\vec{b}\,(3,\ 6)$

$|\ \vec{a}\ | = [(m^2 + (-2)^2]^{1/2} = (m^2 + 4)^{1/2}$

$|\ \vec{b}\ | = (3^2 + 6^2)^{1/2} = (45)^{1/2}$

Nos vamos a (1):

$\vec{a}\ .\ \vec{b} = (m^2 + 4)^{1/2}\ .\ (45)^{1/2}$ (2)

Por otra parte sabemos que:

$\vec{a}\ .\ \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

$\vec{a}\ .\ \vec{b} = (m,\ -2)\ .\ (3,\ 6)$

$\vec{a}\ .\ \vec{b} = 3\ .\ m + (-2)\ .\ 6 = 3m - 12$ (3)

Podemos igualar (2) con (3):

$(m^2 + 4)^{1/2}\ .\ (45)^{1/2} = 3m - 12$

Si elevamos ambos miembros al cuadrado:

$[(m^2 + 4)^{1/2}\ .\ (45)^{1/2}]^2 = (3m - 12)^2$

$(m^2 + 4)\ .\ (45) = 9\ m^2 - 72\ m + 144$

$45\ m^2 + 180 = 9\ m^2 - 72\ m + 144$

$45\ m^2 + 180 - 9\ m^2 + 72\ m - 144 = 0$

$36\ m^2 + 72\ m + 36 = 0$

$m^2 + 2\ m + 1 = 0$

Resolviendo la ecuación anterior:

$m = -1$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{A} = i - 2\ j + 3\ k$ y $\vec{B} = -2\ i + 4j - k$, determinar:

a) **Su producto escalar**
b) **El ángulo que forman**

Resolución

Según sabemos:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 1\ .(-2) + (-2)\ .\ 4 + 3\ .\ (1) = -2 - 8 + 3 = -7$

b)

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\ \vec{A}\ | \cdot |\ \vec{B}\ | \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \vec{A} \cdot \vec{B} \ /\ |\ \vec{A}\ | \cdot |\ \vec{B}\ |\ (1)$

Módulo de A:

$|\vec{A}| = [1^2 + (-2)^2 + 3^2]^{1/2} = (14)^{1/2}$

Módulo de B:

$|\vec{B}| = (-2)^2 + 4^2 + 1^2 = (21)^{1/2}$

Nos vamos a (1) y sustituimos:

$\cos\alpha = (-7)/ [(14)^{1/2} \,.\, (21)^{1/2}] = (-7)/(3,74 \,.\, 4,58)=$

$= -17,12 \rightarrow \alpha = 114,12°$

10.- Producto Vectorial de dos Vectores.

Producto Vectorial de dos Vectores
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

Producto vectorial de dos vectores
http://platea.pntic.mec.es/anunezca/ayudas/producto_vectorial/producto_vectorial.htm

Video: Producto vectorial de dos vectores
http://www.youtube.com/watch?v=75AS_aruQ7Y

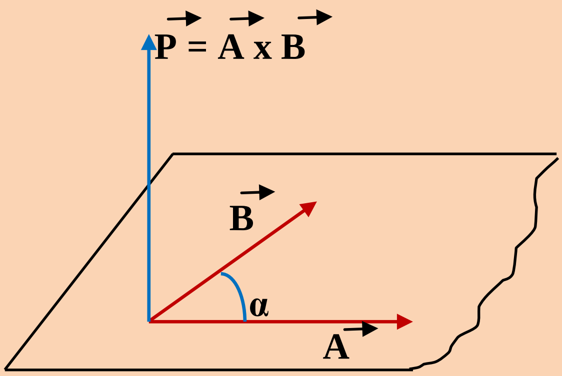
El producto vectorial de dos vectores es un nuevo vector de las siguientes características:

a) **Módulo:** $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \text{sen } \alpha$

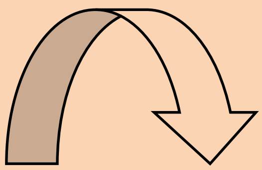
b) **Dirección:** Perpendicular al plano determinado por los dos vectores.

c) **Sentido:** El del avance del sacacorchos que gira del primero al segundo por el camino más corto.

Realicemos el producto vectorial de $\vec{A} \times \vec{B}$ (es importante el orden de los vectores. Como veremos más adelante el producto vectorial de dos vectores no es conmutativo:

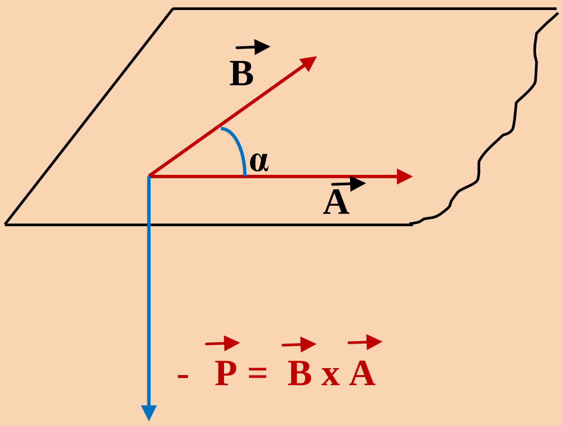


Observamos que el vector $\vec{p}$, producto vectorial, es perpendicular a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y por lo tanto perpendicular al plano que contiene dichos vectores.



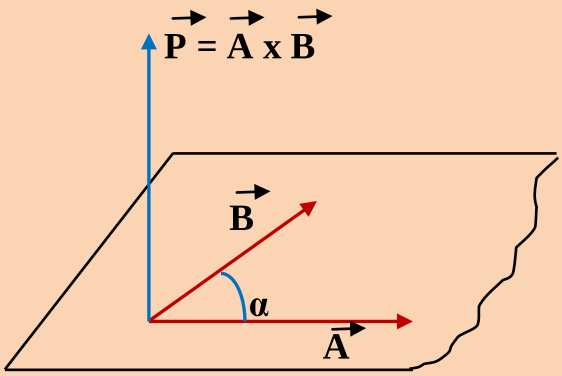
Propiedades del producto Vectorial:

a) No cumple la propiedad conmutativa. El dibujo anterior corresponde al producto vectorial de $\vec{A}$ por $\vec{B}$. Si realizamos el producto vectorial de $\vec{B}$ por $\vec{A}$ nos queda el esquema siguiente:



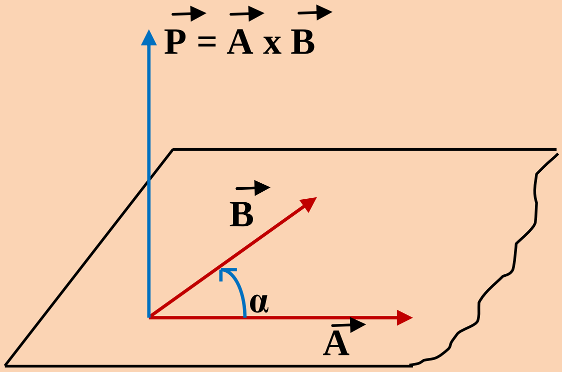
Para que entendáis la existencia de $\vec{P}$ y $(-\vec{P})$ explicaremos la "Regla del sacacorchos":

Estamos en el primer dibujo ($\vec{A} \times \vec{B}$):



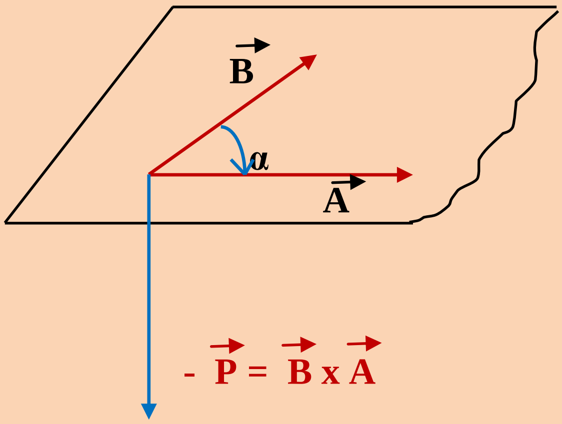
Ponemos en el punto de concurrencia de los dos vectores un "tornillo" con la punta hacia arriba. Por debajo del plano que contiene los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ pondremos un destornillador acoplado al "tornillo". Ahora nos fijamos en la operación que queremos hacer: $\vec{A} \times \vec{B}$

Hacemos girar el destornillador en el sentido de salir de $\vec{A}$ para llegar a $\vec{B}$ por el camino más corto (de izquierda a derecha):



El "tornillo" gira en sentido ascendente, por ello el vector $\vec{P}$ manifiesta su sentido por encima del plano que contiene a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

En el segundo dibujo cuando realizamos la operación $\vec{B} \times \vec{A}$, salimos de $\vec{B}$ buscando a $\vec{A}$ por el camino más corto. El tornillo tiende a descender por debajo del plano que contiene los vectores y obtenemos el vector opuesto al vector $\vec{P}$, es decir $-\vec{P}$:



b) Cumple la propiedad distributiva

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

c) El producto vectorial de dos vectores paralelos es igual al vector nulo:

$$\vec{A} \,||\, \vec{B} \rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = 0$$

Es fácil de demostrar:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \,.\, |\vec{B}|.\ \text{sen}\ \alpha \ ;\ \alpha = 0^\circ \rightarrow \text{sen}\ 0^\circ = 0$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \,.\, |\vec{B}| \,.\, 0 = 0$$

Si utilizamos los componentes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ obtenemos una ecuación que nos permite obtener el vector producto vectorial:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (Ax\ i + Ay\ j + Az\ k) \times (Bx\ i + By\ j + Bz\ k) =$$
$$= AxBx\ (i \times i) + AxBy\ (i \times j) + AxBz\ (i \times k) +$$
$$+ AyBx\ (j \times i) + AyBy\ (j \times j) + AyBz\ (j \times k) +$$
$$+ AzBx\ (k \times i) + AzBy\ (k \times j) + AzBz\ (k \times k)$$

En base al módulo del vector producto vectorial podemos deducir que:

$$\vec{i} \,||\, \vec{i} \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow |\vec{i} \times \vec{i}| = 1 \,.\, 1\ \text{sen}\ 0^\circ = 1 \,.\, 1 \,.\, 0 = 0$$
$$\vec{j} \,||\, \vec{j} \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow |\vec{j} \times \vec{j}| = 1 \,.\, 1 \,.\ \text{sen}\ 0^\circ = 1 \,.1 \,.\, 0 = 0$$
$$\vec{k} \,||\, \vec{k} \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow |\vec{k} \times \vec{k}| = 1 \,.\, 1\ \text{sen}\ 0^\circ = 1 \,.\, 1 \,.\, 0 = 0$$

De la expresión anterior podemos eliminar:

$\vec{A} \times \vec{B}$ = (Ax i + Ay j + Az k) x (Bx i + By j + Bz k)= = AxBx ($\cancel{i \times i}$) + AxBy (i x j) + AxBz (i x k) + AyBx (j x i) + AyBy ($\cancel{j \times j}$) + AyBz (j x k) + AzBx (k x i) + + AzBy (k x j) +AzBz ($\cancel{k \times k}$)

Nos queda:

$\vec{A} \times \vec{B}$ = (Ax i + Ay j + Az k) x (Bx i + By j + Bz k) =
= AxBy (i x j) + AxBz (i x k) + AyBx (j x i) +
+ AyBz (j x k) + AzBx (k x i) + AzBy (k x j)

Por la regla del Sacacorchos podemos obtener:

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$; $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$; $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$

Con todas estas condiciones podemos establecer que:

$\vec{A} \times \vec{B}$ = (Ax i + Ay j + Az k) x (Bx i + By j + Bz k) =
=(AxBy k+AxBz (-j)+AyBx (-k)+AyBzi +AzBx j +
+ AzBy (-i)

$\vec{A} \times \vec{B}$ =AxBy $\vec{k}$ - AxBz $\vec{j}$ -AyBx $\vec{k}$ +AyBz $\vec{i}$ +AzBx $\vec{j}$-AzBy $\vec{i}$ =

= (AyBz – AzBy) $\vec{i}$ + (AzBx – AxBz) $\vec{j}$ + (AxBy – AyBx) $\vec{k}$

Luego:

$\vec{A} \times \vec{B}$ =(AyBz – AzBy) $\vec{i}$ +(AzBx – AxBz) $\vec{j}$ + (AxBy – AyBx) $\vec{k}$

Obtenemos un vector cuyo módulo es:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = [(AyBz - AzBy)^2 + (AzBx - AxBz\ )^2 + (AxBy - AyBx)^2]^{1/2}$$

Existen métodos más sencillos para obtener la fórmula del producto vectorial de dos vectores. El método a utilizar es el Cálculo de Matrices. No sabéis lo que es una matriz luego no tenéis más remedio que aceptar lo que se diga. El producto vectorial de dos vectores los podemos representar de la forma:

$$\vec{A} = Ax\ \vec{i} + Ay\ \vec{j} + Az\ \vec{k}$$
$$\vec{B} = Bx\ \vec{i} + By\ \vec{j} + Bz\ \vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Az & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix}$$

Estamos en una matriz 3x3 (tres filas/tres columnas). Las filas se colocan en el orden del producto que se va a realizar. Primer factor, primera fila. Aplicaremos la resolución de la matriz (lo que tenéis a la izquierda del signo igual) mediante el método de Sarrus. Este señor dice que a la suma de los productos de los factores que nos marque el camino azul le restaremos la suma de los productos de los factores que nos marque la línea amarilla.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix} =$$

$$= A_yB_z\,\vec{i} + A_zB_x\,\vec{j} + A_xB_y\,\vec{k} - (A_yB_x\,\vec{k} + A_xB_z\,\vec{j} + A_zB_y\,\vec{i}) =$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\,\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\vec{k}$$

El mecanismo de Sarrus tiene el inconveniente de tener que aprender los caminos de las flechas. Existe una ampliación de este mecanismo en donde los caminos de los productos son más fáciles de recordar. Consiste el método en ampliar la matriz en dos filas más, repetimos la primera y la segunda. Veamos el método:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= A_yB_z\,\vec{i} + A_xB_y\,\vec{k} + B_xA_z\,\vec{j} - (A_yB_x\,\vec{k} + A_zB_y\,\vec{i} + B_zA_x\,\vec{j}) =$$

$$= \boxed{(A_yB_z - A_zB_y)\,\vec{i} + (B_xA_z - B_zA_x)\,\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\vec{k}}$$

Ejemplo resuelto

Suponiendo dos vectores cuyos módulos son 7 y 8 respectivamente, y sabiendo que el ángulo que forman es de 30°, calcula el módulo del producto vectorial e indica el ángulo que forma con los dos vectores.

Resolución

Recordemos que:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \,.\, |\vec{B}| \,.\, \text{sen}\ \alpha$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = 7 \,.\, 8 \,.\, \text{sen}\ 30^\circ = 28$$

Por definición, el vector producto vectorial de dos vectores es un vector que forma con los dos vectores un ángulo de 90°.

Ejemplo resuelto

Dados los vectores $\vec{u}$ (1 , 2 , 3) y $\vec{v}$ (-1 , 1, 2) calcular:

a) **Su producto vectorial.**
b) **El ángulo que forman los vectores con el vector producto vectorial**

Resolución

a)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\ i + k\ + (-1) \,.\, 3 \,.\, j - [(-1) \,.\, 2 \,.\, k\ + 3\ i + 2\ j =$$

$$= 4\ i\ +\ k\ - 3\ j + 2\ k - 3\ i\ -\ 2\ j = \vec{i} - 5\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

b)

$|\vec{A} \times \vec{B}| = A \,.\, B \,.\, sen\ \alpha$

$sen\ \alpha = |\vec{A} \times \vec{B}| / A \,.\, B \quad (1)$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = [\,1^2 + (-5)^2 + 3^2]^{1/2} = 35^{1/2} = 5{,}9$

$A = (\,1^2 + 2^2 + 3^2\,)^{1/2} = 14^{1/2} = 3{,}74$

$B = [\,(-1)^2 + 1^2 + 2^2]^{1/2} = 6^{1/2} = 2{,}45$

Si nos vamos a la ecuación (1):

$sen\ \alpha = |\vec{A} \times \vec{B}| / A \,.\, B$

$sen\ \alpha = 5{,}9 / (3{,}74 \,.\, 2{,}45)$

$sen\ \alpha = 5{,}9 / 9{,}16 = 0{,}64 \rightarrow \alpha = 39{,}79^{\circ}$

Ejemplo resuelto

Dado los vectores $\vec{u} = 3\,i - j + k$ y $\vec{v} = i + j + k$, hallar el producto vectorial de dichos vectores y comprobar que el vector obtenido es perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Resolución

$$\vec{p} = \vec{u} \times \vec{v} = \left|\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right| =$$

$= -\,i + 3\,k + j - [(-k) + i + 3\,j] =$

= - i + 3 k + j + k - i - 3j =

$= - 2\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$

$\text{sen}\ \alpha = |\,\vec{u} \times \vec{v}\,|\ /\ A\ .\ B$ (1)

Cálculos necesarios:

$p = |\,\vec{u}\ \times\ \vec{v}\,| = [\,(-2)^2 + (-2)^2 + 4^2]^{1/2} = 24^{1/2} = 4{,}89$

$u = [\,(\,3)^2 + (-1)^2 + 1^2]^{1/2} = 11^{1/2} = 3{,}31$

$v = (\,1^2 + 1^2 + 1^2\,)^{1/2} = 3^{1/2} = 1{,}73$

Para calcular el ángulo que forma el vector producto vectorial con los vectores dados tenemos que trabajar independientemente con cada uno de ellos, es decir:

a) $\vec{p}\ .\ \vec{u}$

Recordemos el producto escalar:

$\vec{p}\ .\ \vec{u} = p\ .\ A\ .\ \cos\beta$

$\vec{p}\ .\ \vec{u} = (-\,2\ i - 2\ j + 4\ k)\ .\ (3\ i - j + k) = (-6 + 2 + 4) = 0$

$0 = 4{,}89\ .\ 3{,}31\ .\ \cos\beta$

$0 = 16{,}18\ .\ \cos\beta$

$\cos\beta = 0\ /\ 16{,}18 = 0\ \rightarrow\ \beta = 90^{\circ}$

b)

$\vec{p} \cdot \vec{v} = p \cdot v \cdot \cos \mu$

$\vec{p} \cdot \vec{v} = (-\ 2\ i - 2\ j + 4\ k) \cdot (i + j + k) =$

$= (-2 + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 1) = -2 -2 + 4 = 0$

$0 = 8{,}45 \cos \mu$; $\cos \mu = 0 \rightarrow \mu = 90^{o}$

Ejemplo resuelto

Dado los vectores $\vec{A}$ (2, -1, 1) y $\vec{B}$ (-1, 2, 1), calcular:

a) $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

b) $\vec{C} \cdot \vec{A}$ Discutir este último resultado y predecirlo sin calcularlo previamente

Resolución

a)

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= -i + 4\ k - j - (k + 2\ i + 2\ j) = -\ i + 4\ k - j - k - 2\ i - 2\ j =$

$= -\ 3\ \vec{i} - 3\ \vec{j} + 3\ \vec{k}$

b)

$\vec{C} \cdot \vec{A}$ → se trata de un producto escalar de dos vectores que como resultado se obtiene un escalar. En este caso en concreto el vector $\vec{C}$ y el vector $\vec{A}$ son perpendiculares por las características de $\vec{C}$ (es el producto vectorial de dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El producto escalar tiene la expresión:

$\vec{C} \cdot \vec{A} = C \cdot A \cdot \cos \alpha$

Como:

$\alpha = 90°$ → $\cos 90° = 0$

$\vec{C} \cdot \vec{A} = C \cdot A \cdot 0$

$\vec{C} \cdot \vec{A} = 0$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{u} = 3\,i - j + k$ y $\vec{v} = 2\,i - 3\,j + k$, hallar:

a) El producto $\vec{u} \times \vec{v}$.
b) El producto $\vec{v} \times \vec{u}$.
c) Compara los resultados anteriores.

Resolución

a)

$\vec{u} = 3\,i - j + k$

$\vec{v} = 2\,i - 3\,j + k$

$$\vec{p} = \vec{u} \times \vec{v} = \left|\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right| =$$

$= - i - 9\ k + 2\ j - [(-2)\ k + (-3)\ i + 3\ j] =$

$= - i - 9\ k + 2\ j + 2\ k + 3\ i - 3\ j =$

$= 2\ \vec{i} - \vec{j} - 7\ \vec{k}$

b)

$$\vec{s} = \vec{v} \times \vec{u} = \left|\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right| =$$

$= - 3\ i - 2\ k + 3\ j - (-9\ k - i + 2\ j) =$

$= - 3\ i - 2\ k + 3\ j + 9k + i - 2\ j = - 2\ \vec{i} + \vec{j} + 7\ \vec{k}$

c) Los vectores obtenidos son:

$$\vec{p} = 2\,\vec{i} - \vec{j} - 7\,\vec{k}$$
$$\vec{s} = -2\,\vec{i} + \vec{j} + 7\,\vec{k}$$

Se cumple que $\vec{p} = -\,\vec{s}$

Hemos obtenidos dos vectores opuestos que se caracterizan por:

.- Tener el mismo módulo
.- La misma dirección
.- Sentido contrario

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{u}\,(3, 1, -1)$ y $\vec{v}\,(2, 3, 4)$, hallar:

a) Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
b) El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.
c) Un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Resolución

a) $u = [\,3^2 + 1^2 + (-1)^2]^{1/2} = 11^{1/2} = 3{,}31$
$v = (\,2^2 + 3^2 + 4^2\,)^{1/2} = 29^{1/2} = 5{,}38$

b)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 4\ i + 9\ k - 2\ j - (2\ k - 3\ i + 12\ j) =$

$= 4\ i + 9\ k - 2\ j - 2\ k + 3\ i - \vec{12}\ j =$

$= 7\ \vec{i} - 14\ \vec{j} + 7\ \vec{k}$

El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector que le vamos a llamar $\vec{p}$. Este vector $\vec{p}$, por teoría es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Luego sólo nos hace falta calcular el vector unitario a $\vec{p}$:

$\vec{p} = p\ .\ \vec{a}$; $\vec{a}$ = vector unitario al vector $\vec{p}$

$\vec{a} = p\ /\ p$ (1)

$p = [\ 7^2 + (-14)^2 + 7^2]^{1/2} = 470596^{1/2} = 686$

Si nos vamos a (1):

$\vec{a} = (\ 7\ i - 14\ j + 7\ k\ )\ /\ 686$

$a = \vec{7}/686\ \vec{i} - 14\ /\ 686\ \vec{j} + 7\ /\ 686\ \vec{K}$

Ejercicio resuelto

Hallar dos vectores de módulo la unidad y perpendiculares a $\vec{u}$ (2, -2, 3) y $\vec{v}$ (3, -3, 2).

Resolución

Por definición sabemos que el producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular a los dos vectores citados.

$$\vec{p} = \vec{u} \times \vec{v} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ i & j & k \\ 2 & -2 & 3 \end{array} \right| =$$

$$= -4\,i - 6\,k + 9\,j - (-6\,k - 9\,i + 4\,j) =$$

$$= -4\,i - 6\,k + 9\,j + 6\,k + 9\,i - 4\,j =$$

$$= 5\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$$

$\vec{r} = \vec{v} \times \vec{u}$ = es el vector opuesto al vector $\vec{p}$, como vimos en ejemplo anterior, luego $\vec{r} = -5\,i - 5\,j$

$\vec{p}$ y $\vec{r}$ son dos vectores que cumplen las siguientes condiciones:

a) **Son perpendiculares a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**
b) **Tienen el mismo módulo.**
c) **Tienen la misma dirección.**
d) **Sentido contrario.**

Los vectores unitarios serán:

$$\vec{p} = p\ .\ \vec{a}$$

$\vec{a}$ = vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{p}$

$p = (5^2 + 5^2 + 0^2)^{1/2} = 50^{1/2} = 7,07$

$\vec{a} = \vec{p} / \vec{p}$

$\vec{a} = (5\ i + 5\ j + 0\ k) / 7,07 = 5/7,07\ \vec{i} + 5/7,07\ \vec{j}$

$\vec{r} = r\ .\ \vec{b}$

$\vec{b}$ = vector unitario en la dirección y sentido de r

$r = [(-5)^2 + (-5)^2 + 0^2]^{1/2} = 7,07$

$\vec{b} = \vec{r} / r$

$\vec{b} = (- 5\ i - 5\ j - 0\ k)/7,07$

$\vec{b} = -5/7,07\ \vec{i} - 5/7,07\ \vec{j}$

Ejemplo resuelto

Dados los vectores $\vec{A}$ (3, -2, 2) y $\vec{B}$ (0, 2, 1); calcula los vectores de módulo 3 y perpendiculares a ambos vectores.

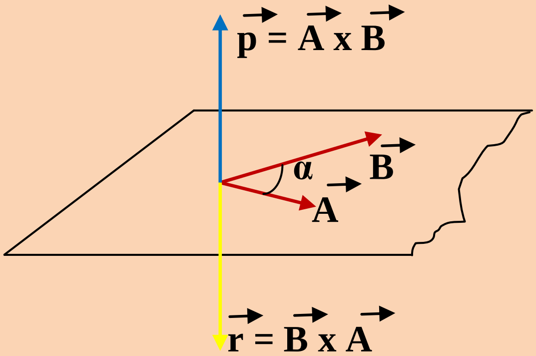
Resolución

Como sabemos, el producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular a los dos primeros. Luego:

$\vec{p} = \vec{A} \times \vec{B}$

$\vec{r} = \vec{B} \times \vec{A}$

$\vec{p}$ y $\vec{r}$ son dos vectores perpendiculares a $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y entre ellos son del mismo módulo, de la misma dirección y de sentido contrario, es decir, son vectores opuestos.



Se cumple que: $\vec{p} = -\vec{r}$

Cálculo de $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\,i + 6\,k - (4\,i + 3\,j) = -2\,i + 6\,k - 4\,i - 3\,j =$$

$$= -6\,\vec{i} - 3\vec{j} + 6\,\vec{k}$$

$$\vec{p} = -6\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 6\,\vec{k} \rightarrow \vec{r} = 6\,\vec{i} + 3\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$$

Vamos a proceder a calcular los vectores unitarios de $\vec{p}$ y $\vec{r}$, luego los multiplicaremos por un escalar, 3, obtendremos los vectores que nos pide el ejercicio:

$p = [(-6)^2 + (-3)^2 + 6^2]^{1/2} = 81^{1/2} = 9$

$r = [\ 6^2 + 3^2 + (-6)^2]^{1/2} = 81^{1/2} = 9$

Todo vector es igual a su módulo por el vector unitario en la dirección y sentido del mismo:

$\vec{p} = p\ .\ \vec{a}$

$\vec{a}$ es el vector unitario en la dirección y sentido de p

$\vec{r} = r\ .\ \vec{b}$

$\vec{b}$ es el vector unitario en la dirección y sentido de r

$\vec{a} = \vec{p}\ /\ p$

$\vec{a} = (\ -6\ i - 3\ j + 6\ k)\ /\ 9$

$\vec{a} = -\ 6/9\ \vec{i} - 3/9\ \vec{j} + 6/9\ \vec{K}$

Simplificando coeficientes:

$\vec{a} = -2/3\ \vec{i} - 1/3\ \vec{j} + 2/3\ \vec{k}$

$\vec{b} = \vec{r}\ /\ r$

$\vec{b} = (\ 6\ i + 3\ j - 6\ k\ )\ /\ 9$

$\vec{b} = 6/9\ i + 3/9\ j - 6/9\ k$

Simplificando coeficientes:

$\vec{b} = 2/3\ \vec{i} + 1/3\ \vec{j} - 2/3\ \vec{k}$

$\vec{S}$ y $\vec{T}$ **son los vectores que nos pide el problema y para ello:**

$\vec{S} = 3\ .\ \vec{a}$

$\vec{S} = 3\ .\ (\ -2/3\ i - 1/3\ j + 2/3\ k\ )$

$\vec{S} = -\ 2\ \vec{i} - \vec{j} + 2\ \vec{k}$

$\vec{T} = 3\ .\ \vec{b}$

$\vec{T} = 3\ .\ (\ 2/3\ i + 1/3\ j - 2/3\ k\ )$

$\vec{T} = 2\ \vec{i} + \vec{j} - 2\ \vec{k}$

Ejemplo resuelto

Dado los vectores $\vec{A}$ (4, -3, 0) y $\vec{B}$ (8, 6, 0), calcula:

a) 2 $\vec{A}$ + $\vec{B}$
b) Un vector de módulo 1 en la dirección de $\vec{A}$.
c) El producto escalar $\vec{A}$. $\vec{B}$
d) El ángulo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$
e) El producto vectorial de $\vec{A}$ x $\vec{B}$
f) El módulo del producto vectorial $\vec{A}$ x $\vec{B}$

Resolución

a)

$2\vec{A} + \vec{B} = 2 \cdot (4, -3, 0) + (8, 6, 0) =$

$= (8, -6, 0) + (8, 6, 0) = 16\ i$

b)

$\vec{A} = A \cdot \vec{u}$

$\vec{u} = \vec{A} / A$

$A = [4^2 + (-3)^2 + 0^2]^{1/2} = 25^{1/2} = 5$

$\vec{u} = (4, -3, 0) / 5$

$\vec{u} = (4/5, -3/5, 0)$

c)

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$

A (4, -3, 0) y B (8, 6, 0)

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 4 \cdot 8 + (-3) \cdot 6 + 0 \cdot 0 = 32 - 18 + 0 = 14$

d)

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \alpha$ (1)

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 14$ (2)

$B = (8^2+6^2+0^2)^{1/2} = 10$
$A = 5$

Utilizando las ecuaciones (1) y (2):

$14 = 5 \cdot 10 \cdot \cos \alpha \quad ; \quad \cos \alpha = 14 / 50 = 0{,}28$

$\alpha = 73{,}73°$

e)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 24\ k - (\ -24\ k\ ) = 48\ \vec{K}$$

f)

$$|\ \vec{A} \times \vec{B}\ | = (48^2)^{1/2} = 48$$

Ejercicio resuelto

Teniendo los vectores $\vec{A}$ (3, 5, 0) y $\vec{B}$ (4, by, 3), calcule "by" para que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean perpendiculares.

Resolución

Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares el ángulo que forman es de 90°.

Recordemos que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \alpha$$

$\cos 90° = 0$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot 0 = 0$

Por otra parte sabemos que:

A . B = AxBx + AyBy + AzBz

Nos quedaría la ecuación:

AxBx + AyBy + AzBz = 0

Sabemos:

$\vec{A}$ **(3, 5, 0) y** $\vec{B}$ **(4, by, 3)**

Por lo que:

3 . 4 + 5 . By + 0 . 3 = 0

12 + 5 By = 0

By = -12/5

Ejercicio resuelto

Suponiendo dos vectores cuyos módulos son 7 y 8 respectivamente, y sabiendo que el ángulo que forman es de 30°, calcule el módulo del producto vectorial e indica el ángulo que forma con los dos vectores.

Resolución

Recordemos:

$|\vec{A} \times \vec{B}| = A \,.\, B \,.\, sen\ \alpha$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = 7 \,.\, 8 \,.\, sen\ 30^{o}$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = 7 \,.\, 8 \,.\, 0{,}5$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = 28$

Teóricamente los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ deben formar con el vector producto vectorial de ambos un ángulo de 90°.

Ejercicio resuelto

Dado los vectores $\vec{A}$ (3, -2, 4) y $\vec{B}$ (2, 3, -6); calcular $\vec{A} \,.\, \vec{B}$ y $\vec{A} \times \vec{B}$. Comprobar que el producto vectorial es perpendicular a ambos vectores.

Resolución

Cálculo de $\vec{A} \,.\, \vec{B}$:

$\vec{A} \,.\, \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$

$\vec{A} \,.\, \vec{B} = 3 \,.\, 2 + (-2) \,.\, 3 + 4 \,.\, (-6) = 6 - 6 - 24 = -24$

Producto vectorial de $\vec{A} \times \vec{B}$:

$$\vec{P} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -6 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 12\ i + 9\ k + 8\ j - (\ -\ 4\ k + 12\ i - 18\ j\ ) =$$

$$= 26\ \vec{j} + 13\ \vec{k}$$

Si el vector $\vec{p}$ es perpendicular a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ veamos lo que le ocurre al producto escalar de $\vec{A}\ .\ \vec{p}$ y $\vec{B}\ .\ \vec{P}$:

Recordemos que:

$$\vec{A}\ .\ \vec{P} = A\ .\ P\ .\ \cos a$$

$$\vec{B}\ .\ \vec{P} = B\ .\ P\ .\ \cos a$$

Para que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{p}$ sean perpendiculares el ángulo formado entre ambos es de 90°. Lo mismo ocurre con los verctores $\vec{B}$ y $\vec{p}$. Esta condición la podemos llevar a las ecuaciones anteriores:

$$\alpha = 90° \rightarrow \cos 90° = 0$$

$\vec{A} \cdot \vec{P} = A \cdot P \cdot \cos 90^{o} = A \cdot p \cdot 0 = 0$

$\vec{B} \cdot \vec{P} = B \cdot P \cdot \cos 90^{o} = B \cdot p \cdot 0 = 0$

Obsevamos que los productos escalares son igual a 0. La ecuaciones:

$\vec{A} \cdot \vec{P} = AxPx + AyPy + AzPz$

$\vec{B} \cdot \vec{P} = AxPx + ByPy + BzPz$

Pasan a ser:

$AxPx + AyPy + AzPz = 0$

$BxPx + ByPy + BzPz = 0$

Veamos si se cumple esta condición:

$\vec{A}$ (3, -2, 4), $\vec{B}$ (2, 3, -6), $\vec{P} = 26\, j + 13\, k$

$3 .\ 0 + (-2) \cdot 26 + 4 \cdot 13 = 0 - 52 + 52 = 0$

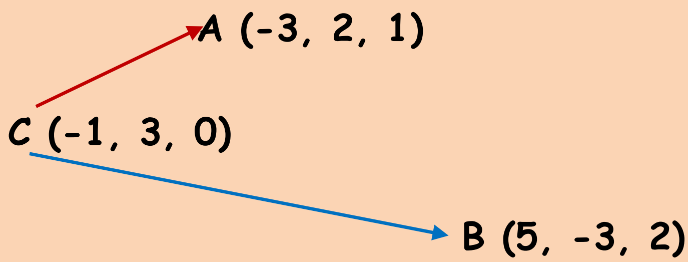
$2 \cdot 0 + 3 \cdot 26 + (-6) \cdot 13 = 78 - 78 = 0$

Demostramos con este cálculo que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares al vector $\vec{P}$.

Ejercicio resuelto

Dos vectores cuyos extremos son $\vec{A}$ (-3, 2, 1) y $\vec{B}$ (5, -3, 2), tienen como origen común el punto C (-1, 3, 0). Calcule el producto escalar y el módulo del producto vectorial de ambos vectores.

Resolución



Componentes del vector $\vec{A}$:

$\vec{A}$ [(-3 – (-1)), (2 – 3). (1 – 0)] → $\vec{A}$ (-2, -1, 1)

Componentes de B:

$\vec{B}$ [(5 – (-1)), (-3 – 3). (2 – 0)] → B (6, -6, 2)

$\vec{A}$ (-2, -1, 1)

El producto escalar de $\vec{A}$. $\vec{B}$ viene dado por la ecuación:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-2) \cdot 6 + (-1) \cdot (-6) + 1 \cdot 2$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -12 + 6 + 2$$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = -4$

El módulo del producto vectorial lo determina la ecuación:

$|\vec{A} \times \vec{B}| = A \cdot B \cdot \text{sen}\ \alpha$

Ecuación que implica conocer los módulos de los vectores y el ángulo que forman entre ellos:

$\vec{A}\ (-2, -1, 1)$

$A = [(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2]^{1/2}$

$A = (4 + 1 + 1)^{1/2}$

$A = (6)^{1/2}$

$\vec{B}\ (6, -6, 2)$

$B = [6^2 + (-6)^2 + 2^2]^{1/2}$

$B = (36 + 36 + 4)^{1/2}$

$B = (76)^{1/2}$

Para conocer el ángulo podemos utilizar el producto escalar:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \alpha$

$\cos \alpha = \vec{A} \cdot \vec{B} / A \cdot B$

Recordemos que $\vec{A} \cdot \vec{B} = -4$

Por tanto:

cos α = - 4 / [(6)$^{1/2}$. (76)$^{1/2}$]

cos α = - 4 / (2,45 . 8,71)

cos α = - 4 / 21,34

cos α = - 0,187 → α = 100,8º

Podemos irnos a la ecuación:

$|\vec{A} \times \vec{B}|$ = A . B . sen α

$|\vec{A} \times \vec{B}|$ = (6)$^{1/2}$. (76)$^{1/2}$. sen 100,8º

$|\vec{A} \times \vec{B}|$ = 2,45 . 8,71 . 0,98 = 20,91

Ejercicio resuelto

Encontrar el vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{A}$ = (2, −6, −3) y $\vec{B}$ = (4, 3, −1)

Resolución

El vector $\vec{p}$ prtoducto vectorial de $\vec{A}$ por $\vec{B}$ es un vector perpendicular a ambos vectores:

$$\vec{p} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ i & j & k \\ 2 & -6 & -3 \end{vmatrix} =$$

$= - 6\ i + 6\ k - 12\ j - (-24\ k + 9\ i - 2\ j) =$

$= - 6\ i + 6\ k - 12\ j + 24\ k - 9\ i + 2j =$

$= - 15\ \vec{i} - 10\ \vec{j} + 30\ \vec{k}$

El vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{p}$:

$\vec{P} = P\ .\ \vec{u}$

Despejasmos u:

$\vec{u} = \vec{p}\ /\ p$

El módulo de $\vec{p}$:

$P = [(-15)^2 + (-10)^2 + 30^2]^{1/2} = (225 + 100 + 900)^{1/2} = 35$

$\vec{u} = (-\ 15\ i - 10\ j + 30\ k)\ /\ 35 =$

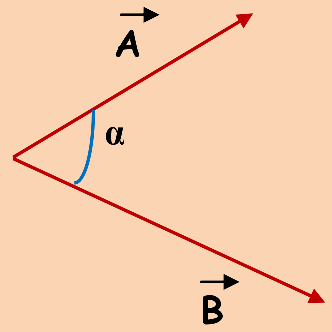
$= -\ 15/35\ i - 10/35\ j + 30/35\ k = -\ 3/7\ \vec{i} - 2/7\ j + 6/7\ \vec{k}$

11.- Proyección de un vector sobre otro

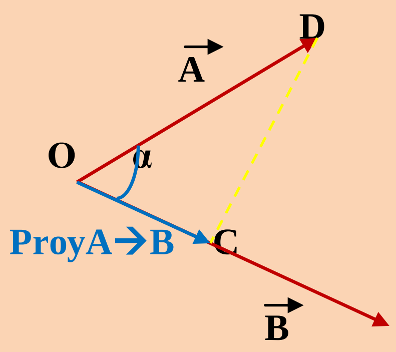
Video: Producto Escalar de dos vectores y proyección de un vector sobre otro (determinación del ángulo entre dos vectores
http://www.youtube.com/watch?v=-r84u5OQPME

Con los vectores
$\vec{A}$ = Ax i + Ay j + Az k y $\vec{B}$ = Bx i + By j + Bz k

Realicemos el siguiente esquema:

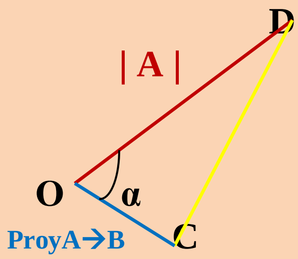


Vamos a determinar la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$. Para ello desde el extremo del vector $\vec{A}$ buscamos perpendicularmente el vector $\vec{B}$:



Si trabajamos con módulos se constituye un triángulo rectángulo $\widehat{OCD}$.

En este triángulo se cumple:



$\cos \alpha$ = cateto contiguo/hipotenusa

$\cos \alpha = \text{ProyA} \rightarrow \text{B} / |\vec{A}|$

De donde:

$\text{ProyA} \rightarrow \text{B} = |\vec{A}| \cdot \cos \alpha$

Recordemos:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \alpha$

Por la propiedad conmutativa:

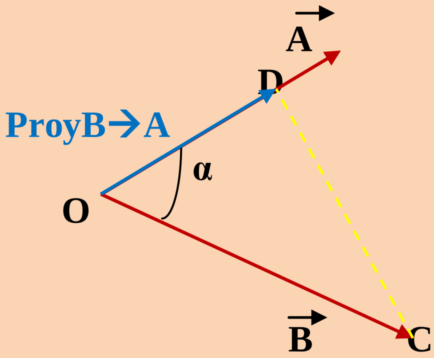
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = B \cdot \underbrace{A \cos \alpha}_{\text{ProyA} \rightarrow \text{B}}$$

luego:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = B \cdot \text{ProyA} \rightarrow \text{B}$

$\text{ProyA} \rightarrow \text{B} = (\vec{A} \cdot \vec{B}) / B$

Partiendo del gráfico inicial vamos a calcular la proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$:



Según el triángulo rectángulo anterior:

$\cos \alpha = \text{ProyB}\rightarrow\text{A} \,/\, B$

$\text{ProyB}\rightarrow\text{A} = B \cdot \cos \alpha$

Recordemos:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot \underbrace{B \cdot \cos \alpha}_{\text{ProyB}\rightarrow\text{A}}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot \text{ProyB}\rightarrow\text{A}$$

$$\text{ProyB}\rightarrow\text{A} = (\vec{A} \cdot \vec{B}) \,/\, A$$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{A}$ = 3 i + 2 j – k y $\vec{B}$ = 6 i – 3 j +2 k, calcular:

a) El ángulo que forman los dos vectores.
b) Gráfica y numéricamente la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$.
c) Gráfica y numéricamente la proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$.

Resolución

a)

Datos necesarios:

$A = [\ 3^2 + 2^2 + (-1)^2]^{1/2} = 14^{1/2} = 3{,}74$
$B = [\ 6^2 + (-3)^2 + 2^2]^{1/2} = 49^{1/2} = 7$

Recordemos que:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \alpha$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$

luego:

$A \cdot B \cdot \cos \alpha = AxBx + AyBy + AzBz$

$3{,}74 \cdot 7 \cdot \cos \alpha = 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2$

$26{,}18 \cos \alpha = 18 - 6 - 2$

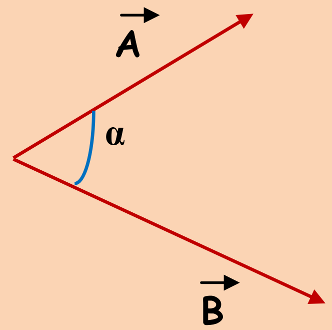
26,18 cos α = 10

cos α = 10 / 26,18

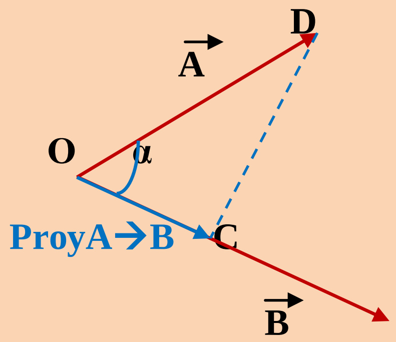
cos α = 0,3819 → α = 67,54°

b)

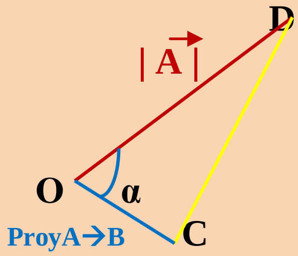
$\vec{A}$ = 3 i + 2 j – k y $\vec{B}$ = 6 i – 3 j +2 k



Determinación de la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$. Para ello desde el extremo del vector $\vec{A}$ buscamos perpendicularmente el vector $\vec{B}$:



Si trabajamos con módulos se constituye un triángulo rectángulo $\widehat{OCD}$. En este triángulo se cumple:



cos α = cateto contiguo/hipotenusa

cos α = ProyA→B/ | $\vec{A}$ |

ProyA→B = | $\vec{A}$ | . cos α

Recordar:

$\vec{A}$. $\vec{B}$ = A . B . cos α

Por la propiedad conmutativa:

$\vec{A}$. $\vec{B}$ = B . $\underbrace{A \cos \alpha}_{\text{ProyA→B}}$

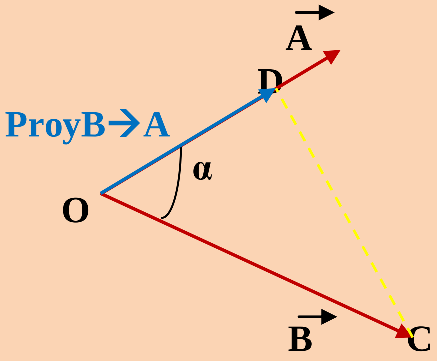
Luego:

$\vec{A}$. $\vec{B}$ = B . ProyA→B

ProyA→B = $\vec{A}$. $\vec{B}$ / B

ProyA→B = 10/ 7 = 1,42

c)



Según el triángulo rectángulo anterior:

$\cos \alpha = \text{ProyB}\rightarrow A \,/\, B$

$\text{ProyB}\rightarrow A = B \cdot \cos \alpha$

Recordemos:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot \underbrace{B \cdot \cos \alpha}_{\text{ProyB}\rightarrow A}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot \text{ProyB}\rightarrow A$$

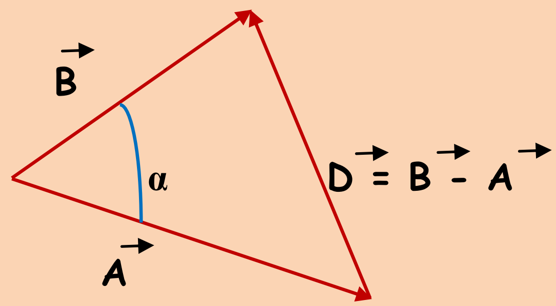
$$\text{ProyB}\rightarrow A = \vec{A} \cdot \vec{B} \,/\, A$$

$$\text{ProyB}\rightarrow A = 10/\ 3{,}74 = 2{,}67$$

12.- Cálculo del Área de un Triángulo.

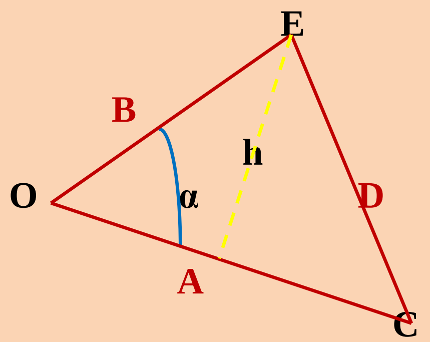
Video: Área de un triángulo
http://www.youtube.com/watch?v=FNztUeuM4BQ&playnext=1&list=PL5F507C2B6B6B1B1D&feature=results_video

El siguiente esquema de vectores ya es conocido por nosotros:



Se trata de una diferencia de dos vectores.

Si trabajamos con los módulos de los vectores:



Intentamos calcular el área del triángulo y recordemos:

Área del triángulo = ½ . base . altura (1)

base = B
altura = h
sen α = cateto opuesto / hipotenusa

sen α = h / B

h = B . sen α (2)

Llevamos la ecuación (2) a la ecuación (1):

Área del triángulo = ½ . A . B . sen α (3)

Recordemos:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = A \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Módulo del producto vectorial de dos vectores que llevaremos a la ecuación (3):

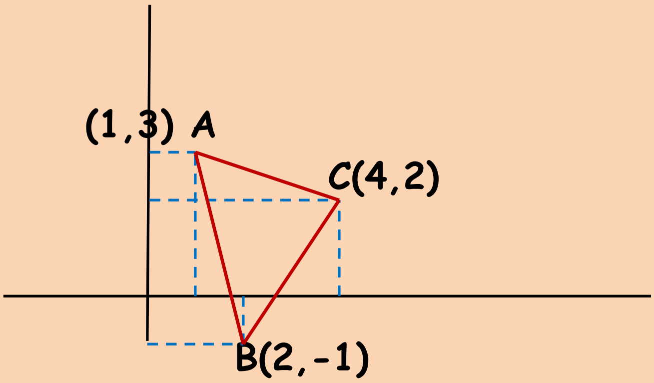
$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\,|\vec{A} \times \vec{B}|$$

Ejercicio resuelto

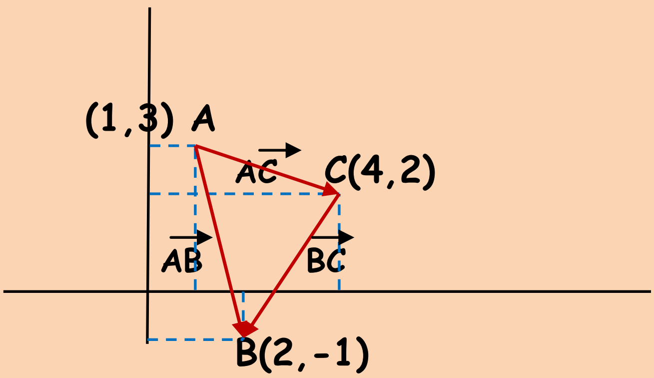
Calcula el perímetro, uno de sus ángulo y el área del triángulo que tiene por vértices los puntos A(1,3); B(2,-1) y C(4,2)

Resolución

Resolución



Para conocer el **perímetro** transformaremos los lados del triángulo en vectores. Los **módulos de dichos vectores serán la longitud del lado correspondiente**. Como el ejercicio nos pide el ángulo que forman dos vectores tendremos presente que nosotros sabemos conocer ángulos entre vectores que tienen un origen común. Vectores a determinar:



$\vec{AC}$ = [(4 – 1) , (2 – 3)] → $\vec{AC}$ (3, -1) → $\vec{AC} = 3\,\vec{i} - \vec{j}$

$\vec{CB}$ = [(2 – 4) , (-1 – 2)] → $\vec{CB}$ (- 2, - 3) → $\vec{CB} = -\,2\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$

$\vec{AB}$ = [(2 – 1) , (-1 – 3)] → $\vec{AB}$ (1, -4) → $\vec{AB} = \vec{i} - 4\,\vec{j}$

$AC = [\,3^2 + (-1)^2]^{1/2} = 10^{1/2} = 3,16$

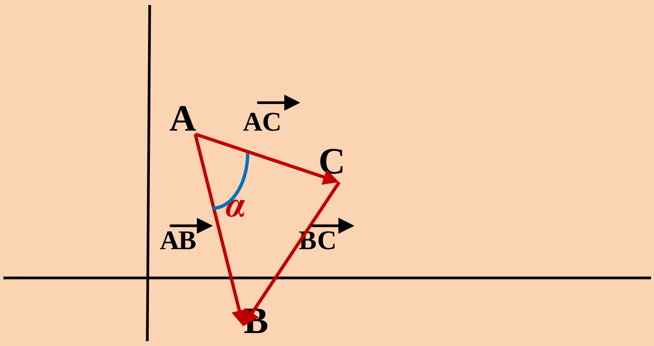
$CB = [\,(-2)^2 + (-3)^2]^{1/2} = 13^{1/2} = 3,6$

$AB = [\,(-1)^2 + 4^2]^{1/2} = 17^{1/2} = 4,12$

Perímetro:

Perímetro = $\overline{AC}$ + $\overline{CB}$ + $\overline{AB}$ = 3,16 + 3,6 + 4,12 = 10,88 udl

Uno de sus ángulos:



Recordemos:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = ABxACx + AByACy + ABzACz$$

Por lo tanto:

$$|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \alpha = ABxACx + AByACy + ABzACz$$

$$4,12 \cdot 3,16 \cdot \cos \alpha = 1 \cdot 3 + (-4) \cdot (-1)$$

$$13,02 \cdot \cos \alpha = 7$$

$$\cos \alpha = 7 / 13,02 = 0,537 \rightarrow \alpha = 57,52^o$$

Área del triángulo:

Área del triángulo = ½ | AB x AC |

Área del triángulo = ½ . AB . AC . sen α

AB = 4,12
AC = 3,16
sen 57,52° = 0,84

Área del triángulo = ½ . 4,12 . 3,16 . 0,84 = 5,46 u^2

u^2 = unidades de superficie

Ejercicio resuelto
Comprobar que los vectores:

$\vec{A}$ = 3 i + 2 j – k;
$\vec{B}$ = i + 3 j – 5 k y
$\vec{C}$ = 2 i – j + 4 k forman un triángulo rectángulo.

Resolución

Para comprobarlo tendremos que determinar que uno de los ángulos del triángulo es de 90°.

Aplicando las ecuaciones del producto escalar podremos resolver el ejercicio.

Cálculos necesarios:

$A = [\ 3^2 + 2^2 + (-1)^2]^{1/2} = 14^{1/2} = 3,74$
$B = [\ 1^2 + 3^2 + (-5)^2]^{1/2} = 35^{1/2} = 5,91$
$C = [\ 2^2 + (-1)^2 + 4^2]^{1/2} = 21^{1/2} = 4,58$

Veamos el ángulo que forma $\vec{A}$ con $\vec{B}$:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \alpha$
$\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$

$A \cdot B \cdot \cos \alpha = AxBx + AyBy + AzBz$

$3,74 \cdot 5,91 \cdot \cos \alpha = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-5)$

$22,1 \cos \alpha = 14$

$\cos\alpha = 14 / 22,1 = 0,63$

$\alpha = 50,95^o$

Ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{C}$:

$C = 4,58$
$A \cdot C \cdot \cos \alpha = AxCx + AyCy + AzBz$

$3,74 \cdot 4,58 \cdot \cos \alpha = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4$

$17,12 \cos \alpha = 6 - 2 - 4$

$17,12 \cos \alpha = 0$

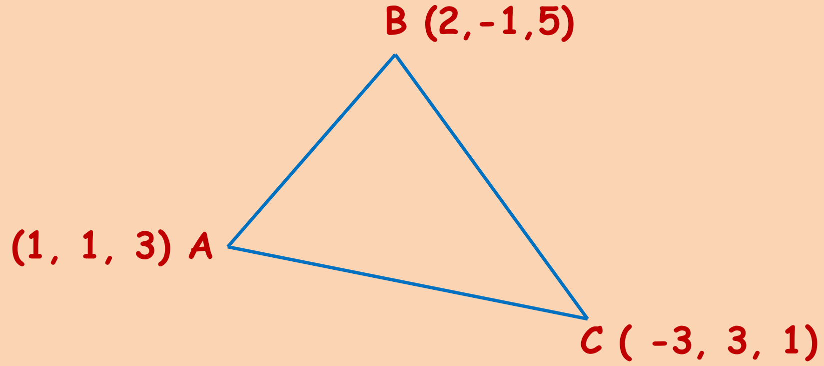
$\cos \alpha = 0 / 17,12 = 0 \rightarrow \alpha = 90^o$

Se ha demostrado la existencia del ángulo de 90° por lo que el ejercicio está terminado.

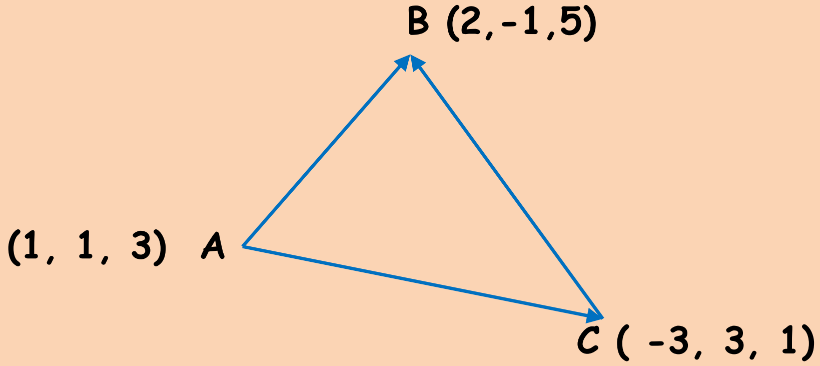
Ejercicio resuelto

Determinar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A(1, 1, 3) , B(2, -1, 5) y C(-3, 3, 1).

Resolución



Si pasamos al diagrama de vectores:



Recordemos que:

Área del triángulo = ½ | AB x AC |

$\vec{AB} = [\,(2 - 1)\,,\,[(-1) - 1],\,(5 - 3)\,]$; $\vec{AB} = i - 2\,j + 2\,k$

$\vec{AC} = [(-3 - 1)\,,\,(3 - 1)\,,\,(1 - 3)\,]$; $\vec{AC} = -4\,i + 2\,j - 2\,k$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \end{array}\right| =$$

$= 4\,i + 2\,k - 8\,j - (\,[(-2).(-4)\,k] + 4\,i\; - 2\,j) =$
$= 4\,i + 2\,k - 8\,j - 8\,k - 4\,i + 2\,j = -\,6\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$

Área del triángulo = ½ | AB x AC |

$|\,AB \times AC\,| = [(-6)^2 + (-6)^2]^{1/2} = 72^{1/2} = 8{,}84$

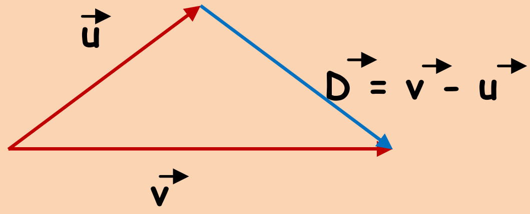
Área = ½ . 8,84 = 4,42 u^2

Ejercicio resuelto

Conociendo los vectores $\vec{u}$ (1, 1, 3) y $\vec{v}$ (3, 3, 2) halla el área del triángulo que determinan:

Resolución

Dibujando la diferencia entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ podemos constituir el triángulo que determinan dichos vectores:



Los módulos de los vectores equivalen a las longitudes de los lados del triángulo.

Recordemos:

Área del triángulo = ½ | $\vec{u} \times \vec{v}$ |

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

= 2 i + 3 k+ 9 j – (3 k + 9 i + 2 j) = 2 i + 3 k + 9 j – 3 k – 9 i – 2 j =

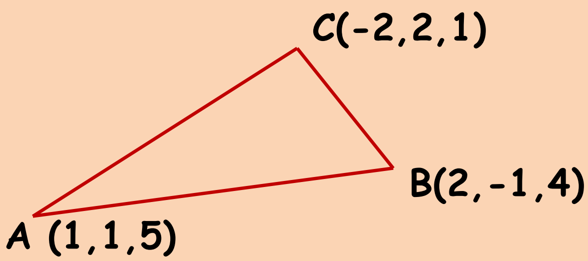
$$= -7\,\vec{i} + 7\,\vec{j}$$

$$|\,\vec{u} \times \vec{v}\,| = [(-7)^2 + 7^2]^{1/2} = 9{,}89$$

$$\text{Área} = \tfrac{1}{2}\,|\,\vec{u} \times \vec{v}\,| = \tfrac{1}{2} \cdot 9{,}89 = 4{,}94\ u^2$$

Ejercicio resuelto

Un triángulo tiene sus vértices en los puntos que se indican en la figura siguiente:

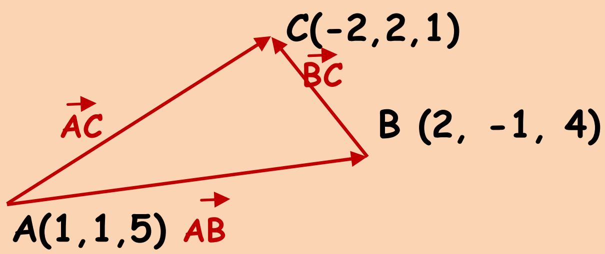


Determinar el área del triángulo.

Resolución

Área del triángulo = ½ | AB x AC |

Podemos establecer los vectores:



$\overrightarrow{AC}$ [(-2) – 1) , (2 – 1) , (1 – 5)] → $\overrightarrow{AC}$ (-3, 1, -4)
$\overrightarrow{AB}$ [(2 – 1) , (-1) – 1) , (4 – 5)] → $\overrightarrow{AB}$ (1 , -2, -1)

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 8\,i + 3\,j + k - 6\,k + 4\,j + i = 9\,\vec{i} + 7\,\vec{j} - 5\,\vec{k}$$

$$|\,AB \times AC\,| = [\,9^2 + 7^2 + (-5)^2]^{1/2} = 155^{1/2} = 12{,}44$$

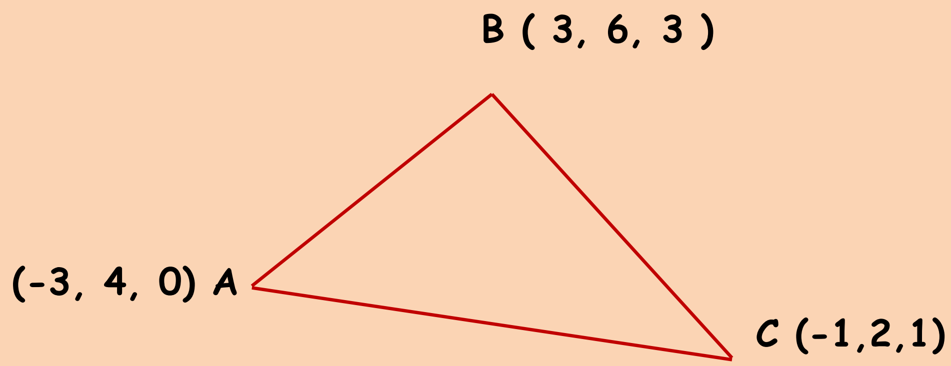
$$Área = \tfrac{1}{2}\,.\,12{,}44 = 6{,}22\ u^2$$

Ejercicio resuelto

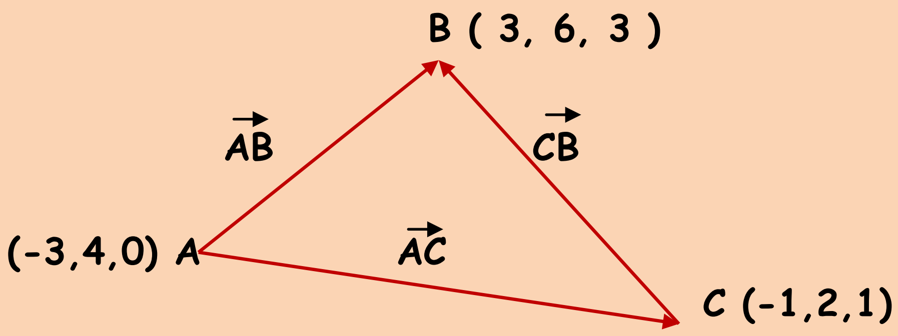
Sean A (- 3, 4, 0) ; B (3, 6, 3) y C (- 1, 2, 1) los tres vértices de un triángulo. Se pide:

a) **El coseno de cada uno de los ángulos del triángulo.**
b) **Área del triángulo.**

Resolución



Calculamos los vectores correspondientes a cada uno de los lados del triángulo, sus módulos y aplicando el teorema del coseno, los cosenos de los tres ángulos del triángulo:



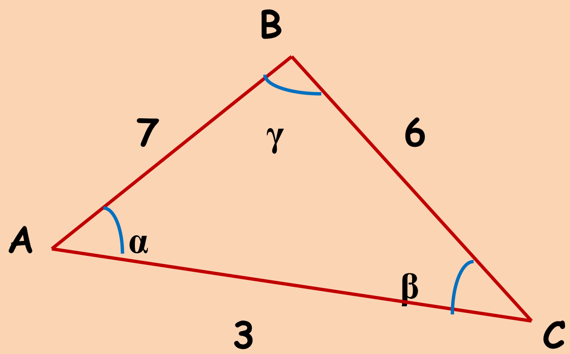
$\overrightarrow{AB}$ [(3–(-3)) , (6 – 4) , (3 – 0)] → $\overrightarrow{AB}$ (6 , 2 , 3)

$\overrightarrow{AC}$ [(-1–(-3)) , (2 – 4) , (1 – 0)] → $\overrightarrow{AC}$ (2 , -2, 1)

$\overrightarrow{CB}$ [(3–(-1)) , (6 – 2) , (3 – 1)] → $\overrightarrow{CB}$ (4 , 4, 2)

$|AB| = (6^2 + 2^2 + 3^2)^{1/2} = 49^{1/2} = 7$
$|AC| = [(2^2 + (-2)^2 + 1^2]^{1/2} = 9^{1/2} = 3$
$|CB| = (4^2 + 4^2 + 2^2)^{1/2} = 36^{1/2} = 6$

Si volvemos al triángulo inicial:



Los valores de los lados no corresponden con la longitud pintada. Pero los consideramos como válidos y podemos seguir trabajando.

Teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \,.\, b \,.\, c \,.\, \cos \alpha$

$6^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \,.\, 3 \,.\, 7 \,.\, \cos \alpha$

$36 = 9 + 49 - 42 \,.\, \cos \alpha$

$- 19 = - 42 \cos \alpha$

$\cos \alpha = -19 /-42 = 0{,}45$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \,.\, a \,.\, c \,.\, \cos \gamma$

$3^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, \cos \gamma$

$9 - 36 - 49 = - 84 \cos \gamma$

$-76 = - 84 \cos \gamma$

$\cos \gamma = -76/- 84$

$\cos \gamma = 0{,}9 \rightarrow \gamma = 25{,}84^\circ$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \,.\, a \,.\, b \,.\, \cos \beta$

$7^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \,.\, 6 \,.\, 3 \,.\, \cos \beta$

$49 - 36 - 9 = - 36 \cos \beta$

$4 = - 36 \cos \beta$

$\cos \beta = 4 / - 36 = - 0{,}11$

β = 96,37º

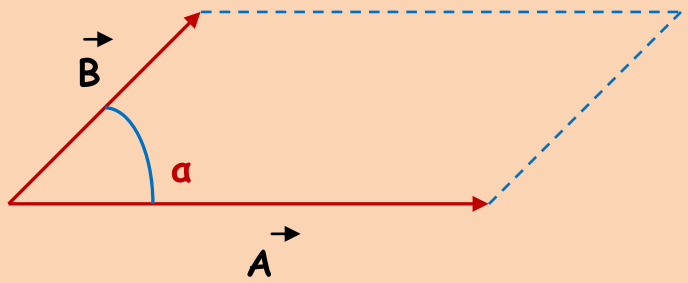
Área del triángulo = | AC | . | AB | . cos α =

= 3 . 7 . 0,45 = 9,45 u²

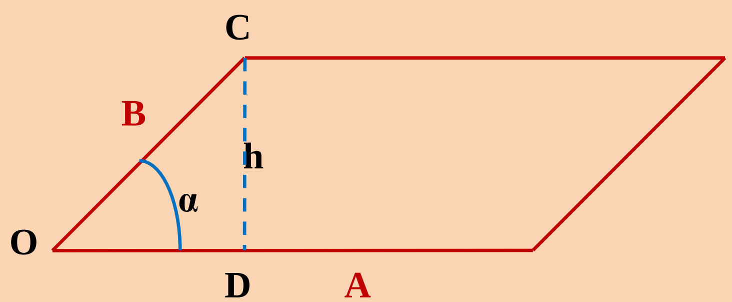
13.- Cálculo del Área de un Paralelogramo.

Video: Área del paralelogramo
http://www.youtube.com/watch?v=vMDskjMJ3F4&playnext=1&list=PL5F507C2B6B6B1B1D&feature=results_video

Dado dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que forman entre ellos un ángulo "α" podemos construir el siguiente diagrama de vectores:



Obtenemos un paralelogramo cuya área queremos conocer.



Área del paralelogramo = base . altura (1)

base = A
altura = h

Del triángulo rectángulo $\widehat{ODC}$:

sen α = h / B

h = B . sen α (2)

Llevamos la ecuación (2) a la ecuación (1):

$$\text{Área del paralelogramo} = \underbrace{A \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha}_{|\vec{A} \times \vec{B}|} =$$

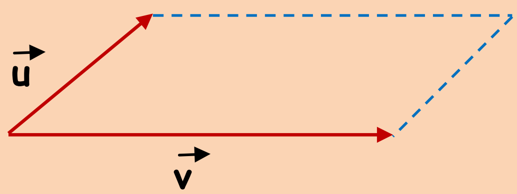
Luego:

$$\text{Área del paralelogramo} = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{u}$ = (3, 1, -1) y $\vec{v}$ (2, 3, 4), hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Resolución



Área del paralelogramo = | u x v |

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 4\ i + 9\ k - 2\ j - (2\ k - 3\ i + 12\ j) =$

$= 4\ i + 9\ k - 2\ j - 2\ k + 3i - 12\ j =$

$= 7\ \vec{i} - 14\ \vec{j} + 7\ \vec{k}$

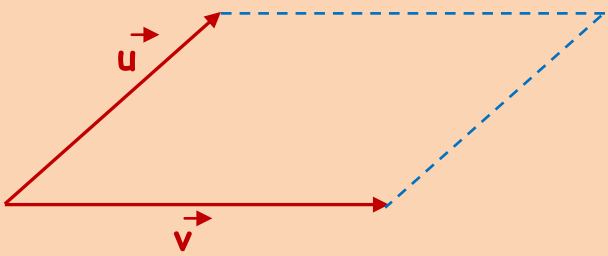
$|\ u \times v\ | = [\ 7^2 + (-14)^2 + 7^2]^{1/2} = 294^{1/2} = 17,14\ u^2$

Área del paralelogramo = 17,14 u^2

Problema Resuelto

Calcula el área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{u}$ (2, 3, 4) y $\vec{v}$ (3, 1, 2)

Resolución



Área del paralelogramo = | u x v |

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

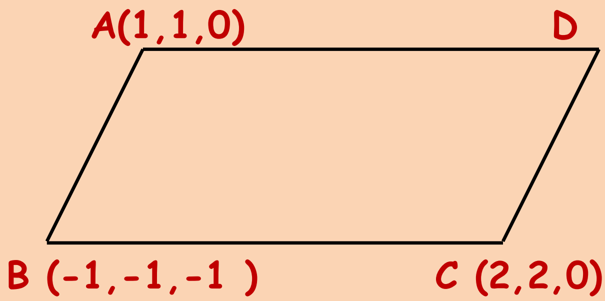
$$= 6\,i + 2\,k + 12\,j - (\,9\,k + 4\,j + 4\,i) = \;= 2\,\vec{i} + 8\,\vec{j} - 7\,\vec{k}$$

$$|\,u \times v\,| = [\,2^2 + 8^2 + (-7)^2]^{1/2} = 117^{1/2} = 10{,}81\ u^2$$

$$\text{Área} = 10{,}81\ u^2$$

Ejercicio resuelto

Considerar la siguiente figura:

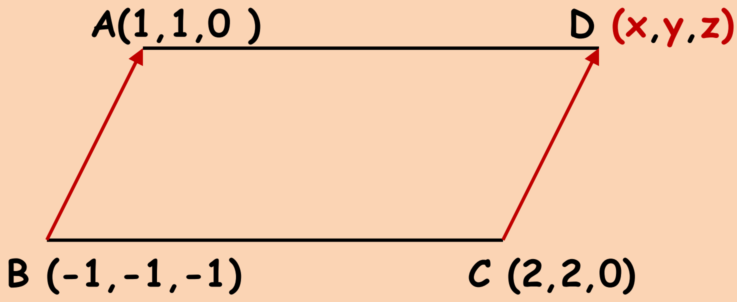


Se pide:

a) Coordenadas de D para qué ABCD sea un paralelogramo
b) Área del paralelogramo.

Resolución

a) **Para que ABCD sea un paralelogramo es necesario que los lados BA y CD sean paralelos y tengan la misma longitud. O bien que los vectores $\vec{BA}$ y $\vec{CD}$ sean equipolentes, es decir, tengan el mismo módulo y por tanto las mismas componentes.**



Componentes vector $\vec{BA}$:

$\vec{BA}$ [(1 – (- 1)),(1 – (-1)),(0 – (-1))]

$\vec{BA}$ (2 , 2 , 1)

Componentes del vector $\vec{CD}$:

$\vec{CD}$ [(x – 2),(y – 2),(z – 0)]

Como | $\vec{BA}$| = | $\vec{CD}$ | se cumplirá:

x – 2 = 2 ; x = 4

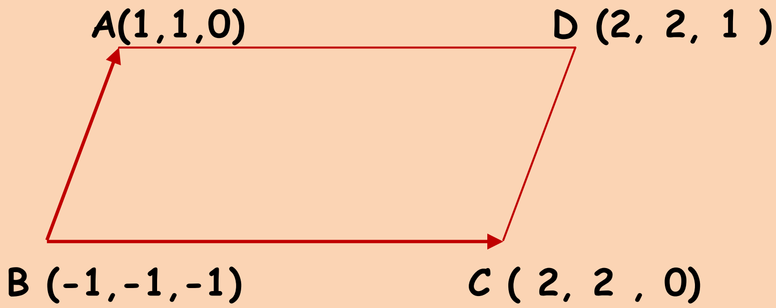
y – 2 = 2 ; y = 4

z – 0 = 1 ; z = 1

Las coordenadas del punto D son (4, 4, 1)

b) El Área del paralelogramo.

Trabajaremos con el dibujo inicial:



$\overrightarrow{BA}$ **(2, 2, 1)**

$\overrightarrow{BC}$ **(3, 0, 1)**

Área del paralelogramo = | BA x BC | (1)

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\ i + 3\ j - (\ 6\ k + 2\ j\ ) = 2\ \vec{i} + \vec{j} - 6\ \vec{k}$$

$$|\ BA \times BC\ | = [\ 2^2 + 1^2 + (\ -6)^2]^{1/2} = 41^{1/2} = 6{,}4$$

Si nos vamos a la ecuación (1):

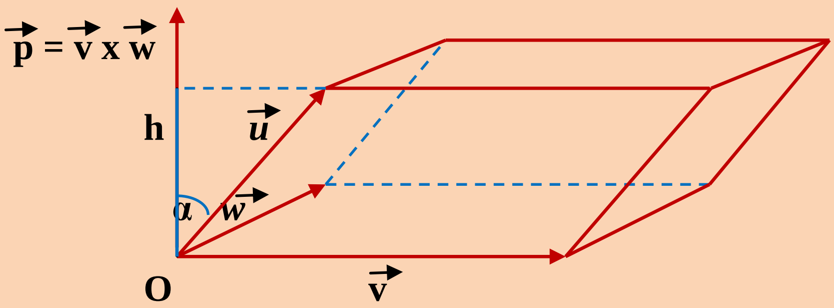
Área del paralelogramos = 6,4 u^2

14.- Cálculo del Volumen de un Paralelepípedo. Producto Mixto de tres vectores.

Video: Volumen del paralelepípedo. Producto mixto de tres vectores
http://www.youtube.com/watch?v=DgN8AYnGFU4

Producto mixto de tres vectores

Con los vectores $\vec{u}$ (u_x, u_y, u_z); $\vec{v}$ (v_x, v_y, v_z) y $\vec{w}$ (w_x, w_y, w_z) vamos a constituir el armazón de un paralelepípedo realizando una posición de dichos vectores en unos ejes de coordenadas en el espacio:

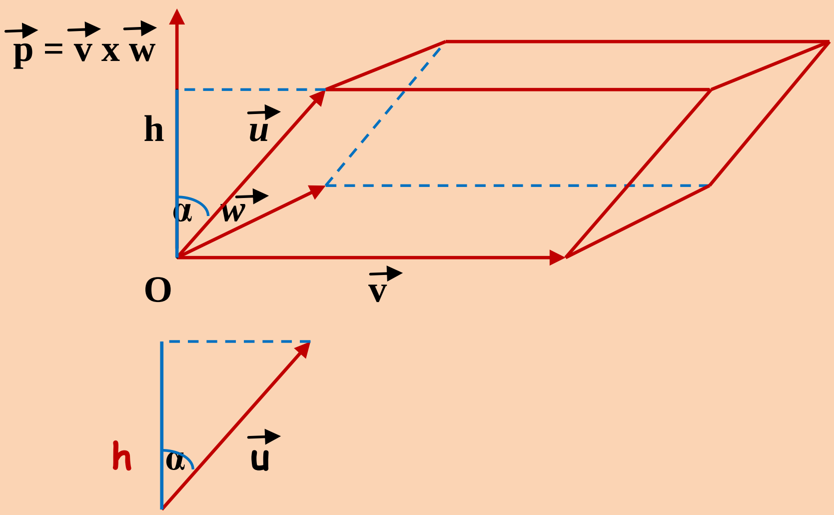


Explicaremos el dibujo anterior:

a) Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ determinan la base del paralelepípedo.
b) El vector $\vec{p}$ es el producto vectorial de $\vec{v} \times \vec{w}$
c) h es la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{p}$
d) α es el ángulo que forman $\vec{u}$ con $\vec{v} \times \vec{w}$

Si queremos determinar el volumen del paralelepípedo recordemos su fórmula:

Volumen = Área de la base x la altura (1)



La base es el paralelogramo constituido por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y su Área viene determinada pos la ecuación:

Área de la Base = | v x w |

En lo referente a la atura en el dibujo se puede apreciar la existencia de un triángulo rectángulo constituido por el módulo de $\vec{u}$, la h y el trazo azul que produce la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{p}$. Entre h y el módulo de $\vec{u}$ existe un ángulo α. Según este triángulo:

cos α = h / | u |

Despejando h:

h = | u | . cos α

Si nos vamos a la ecuación del volumen del paralelepípedo (1):

Volumen = Área de la base x la altura (1)

Volumen = | v x w | . | u | . cos α

Si analizamos el miembro de la derecha de la ecuación anterior observamos que se trata de un escalar:

$$\text{Volumen} = \underbrace{|\,v \times w\,|}_{\text{Escalar}} \;.\; \underbrace{|\,u\,|}_{\text{Escalar}} \;.\; \underbrace{\cos \alpha}_{\text{Escalar}} = \text{UN ESCALAR}$$

Podemos afirmar que el volumen de un paralelepípedo ES UN ESCALAR que se conoce como PRODUCTO MIXTO DE TRES VECORES:

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = [\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\,,\,\vec{w}\,]$$

El producto mixto de tres vectores se puede obtener por el cálculo matricial:

$$[\,u\,,\,v\,,\,w\,] = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Llegamos a la conclusión de que el PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES se trata del producto escalar de uno de ellos por el producto vectorial de los otros dos, obteniendo un resultado numérico como el procedente del cálculo del volumen de un paralelepípedo.

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ los vectores. El producto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ es el producto mixto de tres vectores.

Podemos establecer:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$$

En realidad, estamos multiplicando escalarmente, un vector por el producto vectorial de dos vectores, que sería como decir: multiplicamos el área de la base por la altura que equivale al volumen de un paralelepípedo.

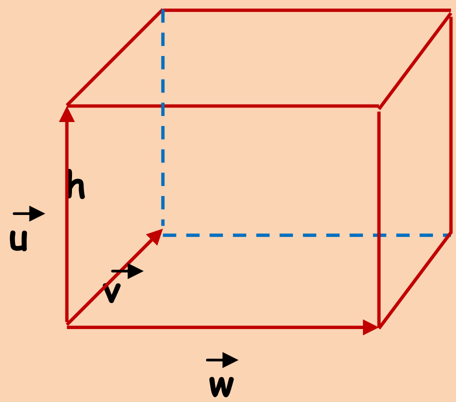
Volumen del paralelepípedo $= \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{u}$ (1, 3, 5) ; $\vec{v}$ (2, -1, 4) y $\vec{w}$ (2, 4 , 3), determinar el volumen del paralelepípedo que constituyen.

Resolución

Dibujamos la figura y colocamos los vectores:



Volumen del paralelepípedo = Área de la base x la atura =

= | v x w | . | u | = $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Área de la base = | v x w |

Altura = h = | u |

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

= -3 + 40 + 24 – (-10 + 16 + 18) = 61 – 24 = **37 u^3**

Volumen del paralelepípedo 37 u^3

Ejercicio resuelto

Tenemos tres vectores cuyas componentes son:

$$\vec{u}\,(2, -1, 1)\ ;\ \vec{v}\,(3, -2, 5)\ \text{y}\ \vec{w}\,(3, 5, 1)$$

Responde, tras comprobar, si el valor escalar de $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ es igual a $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$ y a $\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$.

Resolución

Si el producto mixto de tres vectores es un Escalar en la multiplicación se cumple que el orden de los factores no altera el producto. Para quedarnos más conforme podemos realizar los tres productos:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 - 15 + 15 - (-6 - 3 + 50) = + 50) = -45$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 15 - 4 - 15 - (50 - 6 - 3) = -45$$

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -15 + 15 - 4 - (-3 + 50 - 6) = -45$$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores:

$$\vec{u}\,(2,\,1,\,3)\;;\;\vec{v}\,(1,\,2,\,3)\;\;y\;\;\vec{w}\,(-1,\,-1,\,0)$$

Hallar el producto mixto [$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$]. ¿Cuánto vale el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los vectores dados.

Resolución

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \text{Volumen paralelepído}$$

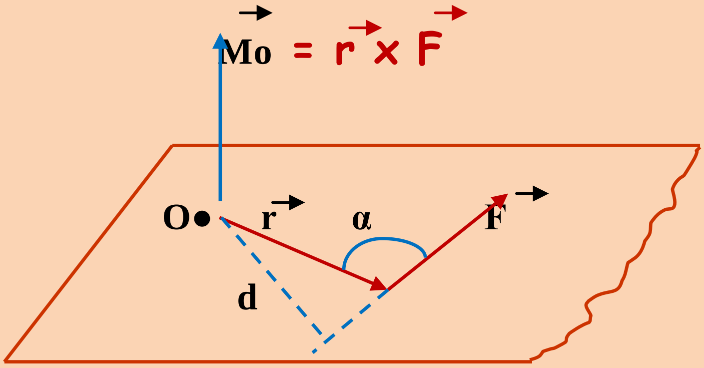
$$= -3 - 3 - (-6 - 6) = -6 + 12 = 6\ u^3$$

Volumen paralelepípedo 6 u^3

15.- Momento de un Vector respecto a un punto. Teorema de Varignon.

Nos encontramos con el problema de desenroscar una tuerca de un tornillo. El tiempo ha oxidado la tuerca y el tornillo y el proceso se nos hace difícil. La solución del problema consiste en hacer girar la tuerca y para ello utilizamos líquidos lubricantes para ayudarnos en nuestra labor. Quiero que os fijéis en lo que he dicho anteriormente "La solución del problema consiste en hacer girar la tuerca". TENEMOS QUE HACER QUE UN CUERPO GIRE.

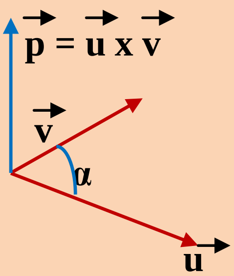
Supongamos que la tuerca se encuentra en el plano y vamos a utilizar una fuerza (magnitud vectorial). Consideramos la tuerca como un punto.



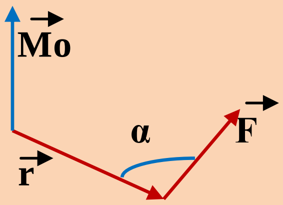
El Momento de un vector $\vec{F}$ respecto a un punto, O, se define como el producto vectorial del vector $\vec{r} \times \vec{F}$:

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{F}$$

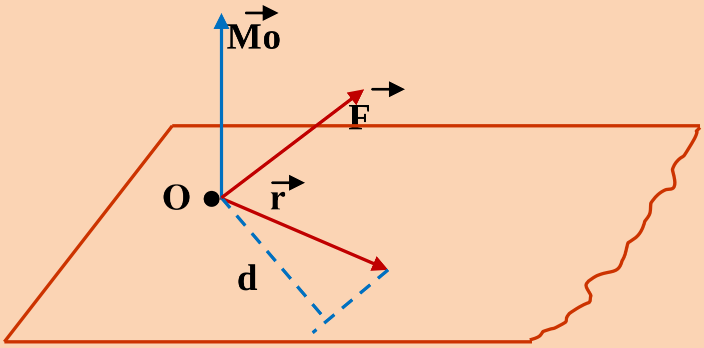
La primera objeción que podéis realizar es saber cómo se ha producido el producto vectorial. Vosotros lo conocéis de la forma:



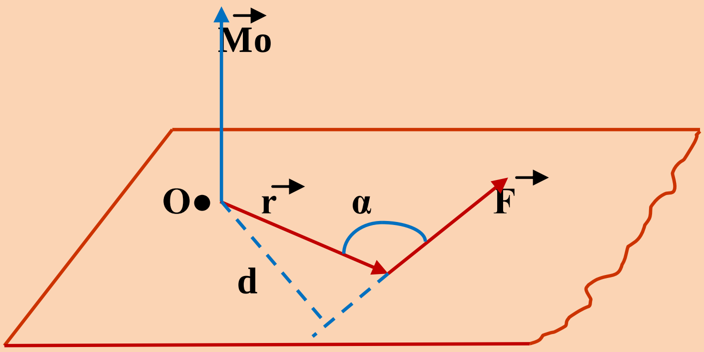
En esta nueva situación los vectores nos vienen de la forma:



El problema lo resolvemos recordando la Equipolencia de vectores. Vectores equipolentes son aquellos que tienen la misma dirección, sentido y mismo módulo pero distinto punto de aplicación. Por una simple traslación del vector $\vec{F}$ de la figura inicial podremos tener los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ en las condiciones de un producto vectorial como fue explicado:



Resuelto el problema de la posición de los vectores para producir un producto vectorial volvemos al principio del punto que estamos tratando:



El Momento ($\vec{Mo}$) de un vector $\vec{F}$ respecto a un punto, O, se define como el producto vectorial de $\vec{r}$ por $\vec{F}$:

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{r}$ es el vector posición que determina el punto de aplicación del vector $\vec{F}$

$\vec{F}$, en nuestro caso, es el vector fuerza que estamos aplicando.

Las características del vector Momento, $\vec{Mo}$, las podemos establecer en:

a) Se trata de un vector LIBRE.

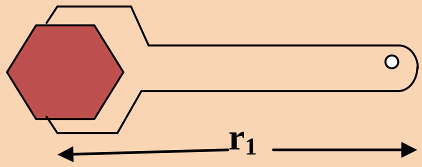
b) Su módulo viene determinado por la ecuación:

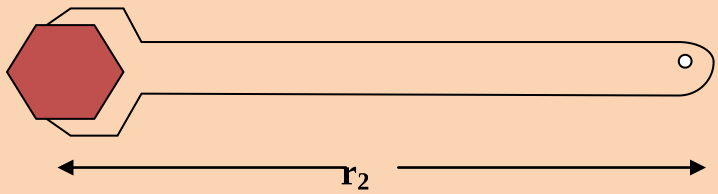
$$|\vec{Mo}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen}\,\alpha$$

c) Su dirección es perpendicular al plano en donde se encuentran los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$.

d) Su sentido viene determinado por el avance del tornillo que gira en el mismo sentido que el vector $\vec{F}$ (recordar las reglas que se establecieron para determinar el sentido de un vector producto vectorial).

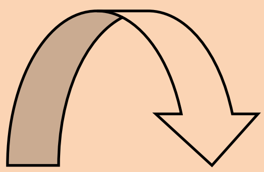
Veamos si hemos comprendido el concepto del vector Momento. Teníamos una tuerca que destornillar. Tenemos un vector que la hace girar. Nos vamos a olvidar de los lubricantes y vamos a utilizar la Fuerza bruta. Tenemos dos llaves inglesas para destornillar la tuerca, una más larga que la otra:





¿Cuál de ellas utilizaréis?

La de longitud r_2 (la más larga) puesto que aumenta el módulo de $|\vec{r}|$ y el módulo del vector Momento, $|\vec{Mo}|$, se hace mayor y girará con mayor velocidad que en nuestro caso se traduce en desenroscar más fácilmente.

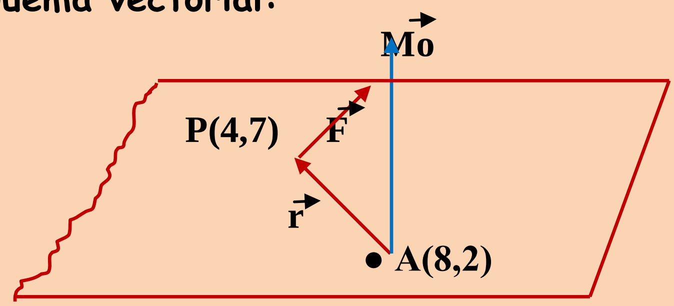


Ejercicio resuelto

El vector $\vec{F}$ = 2 i + j tiene su punto de aplicación en el punto P(4,7). Determina el momento de $\vec{F}$ respecto del punto A(8,2).

Resolución

Esquema vectorial:



Componentes del vector $\vec{r}$:

$\vec{r}$ [(4 – 8) , (7 – 2)] → $\vec{r}$ (-4, 5)

El momento de $\vec{F}$: $\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{F}$

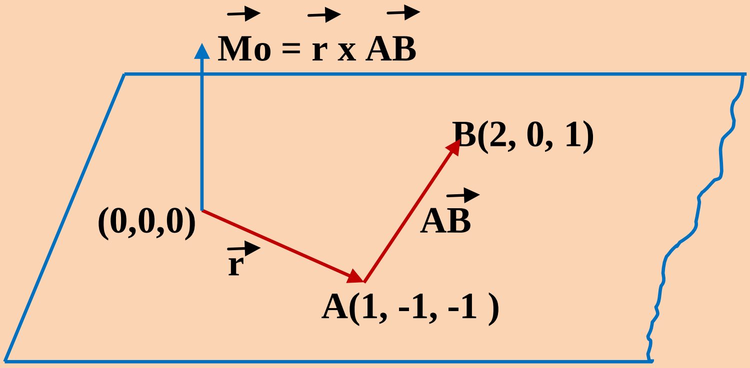
$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4\,k - (10\,k) = -14\,\vec{k}$$

Ejercicio resuelto

Calcula el momento del vector $\vec{AB}$, definido por A (1,-1,-1) y B (2, 0 , 1), respecto al origen de coordenadas.

Resolución

Esquema vectorial:



Componentes del vector $\vec{r}$:

$\vec{r}\,[\,(1-0),\ (-1-0),\ (-1-0)\,] \rightarrow \vec{r}\,(1,\ -1,\ -1)$

Componentes del vector $\vec{AB}$:

$\vec{AB}\,[\,(2-1),\ (0-(-1)),\ (1-(-1))\,] \rightarrow \vec{AB}\,(1,\ 1,\ 2)$

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\,i - j + k - (-k + 2\,j - i) = -\vec{i} - 3\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$$

Ejercicio resuelto

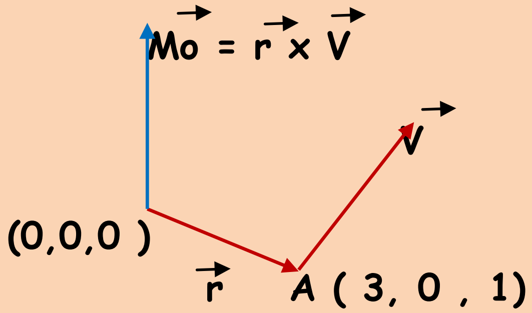
El vector $\vec{V}$ (2, 1, 0) tiene su punto de aplicación en A (3, 0, 1), calcula:

a) El momento de $\vec{V}$ respecto del origen de coordenadas.
b) El momento de $\vec{V}$ respecto del punto b (3, -2, -1)

Resolución

a)

El punto A es el punto extremo del vector r



Componentes del vector $\vec{r}$:

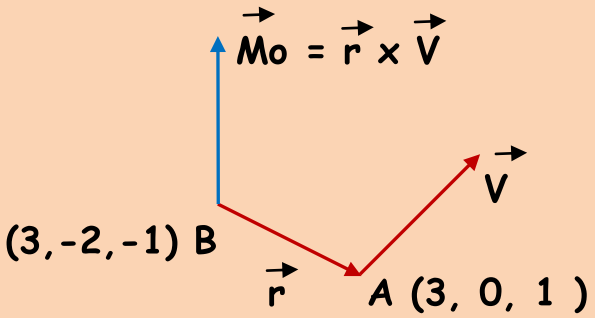
$\vec{r}$ [(3 – 0) , (0 – 0) , (1 – 0)] → $\vec{r}$ (3, 0, 1)

El vector Mo con respecto al origen de coordenadas:

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,j + 3\,k - (\,i\,) = -\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

El momento respecto al punto B (3, -2 , -1):



Componentes vector $\vec{r}$:

$\vec{r}\,[\,(3-3)\,,\,(0-(-2))\,,\,(1-(-1))\,] \rightarrow \vec{r}\,(\,0,\,2,\,2\,)$

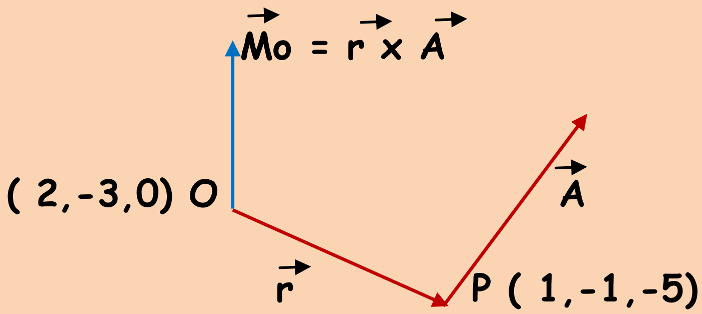
$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\,j - (\,4\,k + 2\,i\,) = -\,2\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 4\,\vec{k}$$

Ejercicio resuelto

Dado el vector $\vec{A} = j - 3\,k$ aplicado en el punto P(1,-1,-5), halla su momento respecto del punto O (2, -3, 0).

Resolución



Componentes del vector $\vec{r}$:

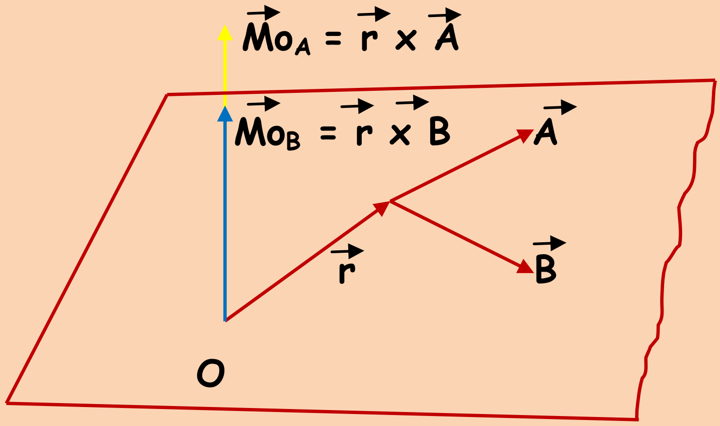
$\vec{r}\,[\,(1-2),((-1)-(-3))\,,\,((-5)-0)\,] \rightarrow \vec{r}\,(\,-1,\,2,\,-5\,)$

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\,6\,i - k - (\,3\,j - 5\,i\,) = -\,\vec{i} - 3\,\vec{j} - \vec{k}$$

Teorema de Varignon

Supongamos dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$, aplicados en un mismo punto y con el mismo vector de referencia respecto a un punto O. Según lo visto hasta el momento, un vector con un vector de referencia respecto a un punto producía un Momento, dos vectores producirán dos momentos.



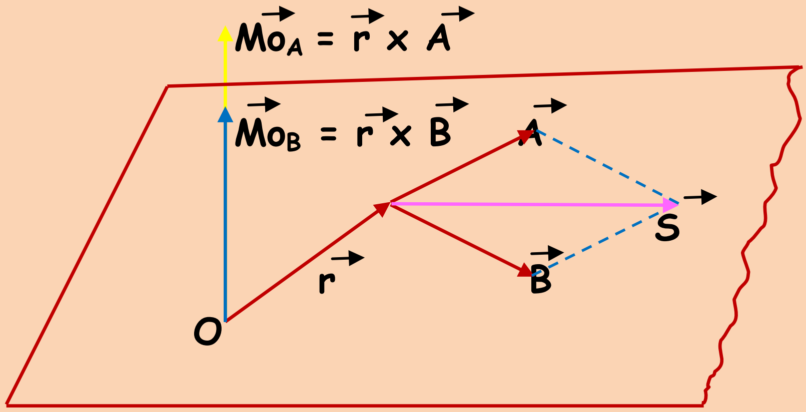
Existe un momento total:

$$\vec{Mo}_T = \vec{Mo}_A + \vec{Mo}_B = \vec{r} \times \vec{A} + \vec{r} \times \vec{B} =$$

Por la propiedad distributiva:

$$= \vec{r} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{r} \times \vec{S}$$

Varignon concluye: El Momento, respecto de un punto, de la suma de varios vectores es igual a la suma de sus momentos, respecto al mismo punto O:



Ecuación del Teorema de Varignon:

$$\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S}$$

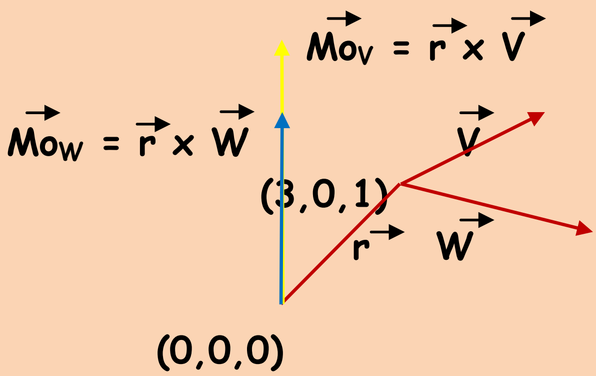
Ejercicio resuelto

El vector $\vec{V}$ (2, 1, 0) y el vector $\vec{W} = i - j + 3\,k$ tienen su punto de aplicación en el punto P (3, 0, 1), calcular:

a) El momento resultante respecto al origen de coordenadas.
b) El momento resultante respecto al punto B (3, -2, -1).

Resolución

a)



Componentes del vector $\vec{r}$:

$\vec{r}$ [(3 - 0) , (0 - 0) , (1 - 0)] → $\vec{r}$ (3, 0, 1)

$$\vec{Mo}_V = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,j + 3\,k - (\,i\,) = -\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

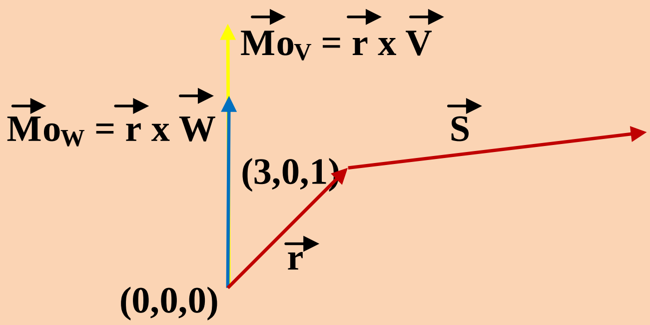
$$\vec{Mo}_W = \vec{r} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= j - 3\,k - (\,9\,j - i\,) = \vec{i} - 8\,\vec{j} - 3\,\vec{k}$$

$$\vec{Mo}_T = \vec{Mo}_V + \vec{Mo}_W = (\,-\,i + 2\,j + 3\,k\,) + (\,i - 8j - 3\,k\,) =$$

$$= -\,i + 2\,j + 3\,k + i - 8\,j - 3\,k = -\,6\,\vec{j}$$

Según Varignon:



$$\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S} \qquad (1)$$

$\vec{V}$ (2, 1, 0), $\vec{W}$ = i – j + 3 k

$\vec{r}$ (3, 0, 1)

$\vec{V}$ (2, 1, 0)

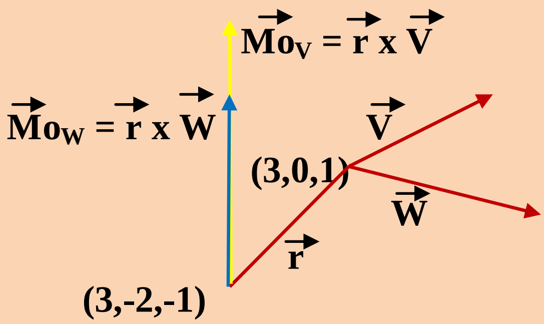
$\vec{S} = \vec{V} + \vec{W}$ = (2 i + j) + (i – j + 3 k) = 3 $\vec{i}$ + 3 $\vec{k}$

Vamos a (1):

$$\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\,j - (9\,j) = -6\,\vec{j}$$

b)

Respecto al punto B (3, -2, -1):



Componentes del vector $\vec{r}$:

$\vec{r}$ [(3 – 3) , (0 – (-2)) , (1 – (-1))] → $\vec{r}$ (0, 2, 2)

$$\vec{Mo}_V = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\,j - (4\,k + 2\,i) = -2\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 4\,\vec{k}$$

$$\vec{Mo}_W = \vec{r} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

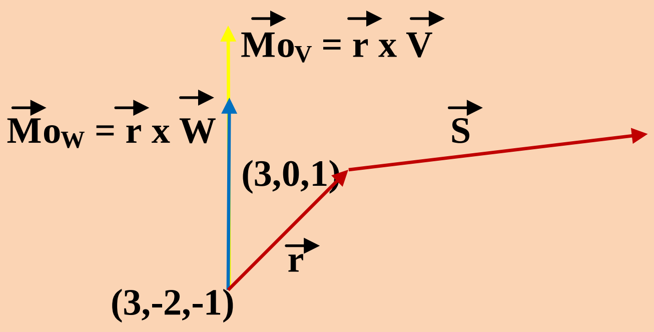
$$= 6\,i + 2\,j - (2\,k - 2\,i) = 8\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$$

$$\vec{Mo}_T = \vec{Mo}_V + \vec{Mo}_W = (-2\,i + 4\,j - 4\,k) + (8\,i + 2\,j - 2\,k)$$

$$= -2\,i + 4\,j - 4\,k + 8\,i + 2\,j - 2\,k =$$

$$= 6\,\vec{i} + 6\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$$

Según Varignon:



$$\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S} \quad (1)$$

$\vec{r}\,(0\,,\,2\,,\,2)$

$\vec{V}\,(2,\,1,\,0)$, $\vec{W} = i - j + \vec{3}\,k$

$\vec{S} = \vec{V} + \vec{W} = (2\,i + j) + (i - j + 3\,k) = 3\,i + 3\,k$

Vamos a (1):

$$\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 6\,i + 6\,j - (6\,k) = 6\,\vec{i} + 6\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$$

----------------- O -----------------